CALCUL VECTORIEL

I. GENERALITES

I .1. Définition

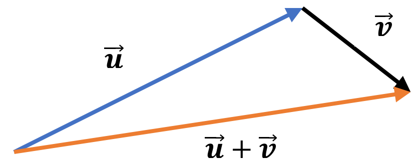
Un vecteur est un segment de droite portant une origine et une extrémité. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, par exemple, se caractérise par :

- Sa direction : droite (AB) et des droites parallèles à (AB).
- Son sens : de A à B.
- Sa norme (ou module) : longueur du segment [AB], noté $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont :

- La même direction.
- Le même sens.
- La même norme (module).

I.2. Relation de Chasles



La relation de Chasles est un cas particulier d'addition de vecteurs, elle ne peut s'appliquer que lorsque l'extrémité du premier vecteur correspond au même point que l'origine du deuxième vecteur, dans ce cas le vecteur somme possède la même origine que le premier vecteur et a la même extrémité que le second vecteur.

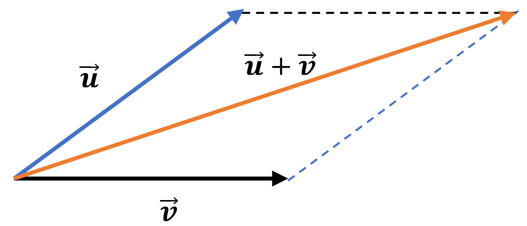
Exemples:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{CN}$

I.3. Règle du parallélogramme



I.4. Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u}=k\vec{v}$; $k \in R$

I.5. Propriétés de la multiplication

$(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

II. REPERAGE DANS LE PLAN

❖ **Rappel :** Un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est dit orthonormé si :

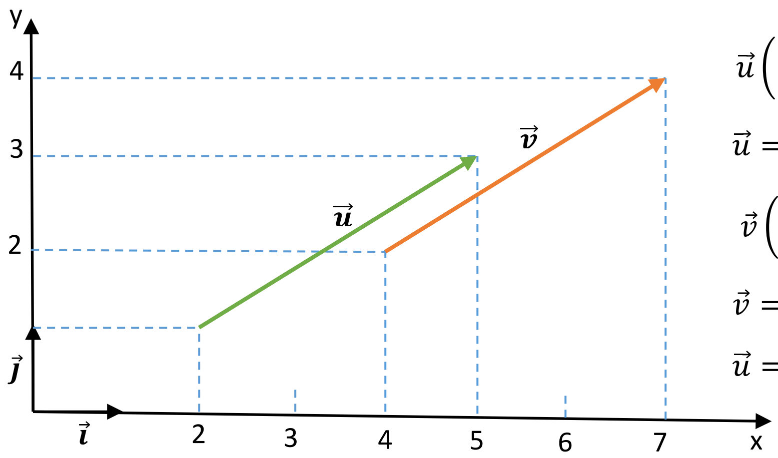
- $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$
- et l'axe des ordonnées est perpendiculaire à l'axe des abscisses.

Remarque : Les calculs des longueurs ne se font que dans un repère orthonormé.

Soient deux vecteurs $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$ dans un plan orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

On a $\quad \vec{u} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

Exemple :



$\vec{u}\begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

$\vec{v}\begin{pmatrix} 7-4 \\ 4-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

$\vec{u} = \vec{v}$

❖ **Conséquence:**

Dans un repère orthonormé, les deux points A(x_A,y_B) et B(x_B,y_B) forment un vecteur

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Le module de $\overrightarrow{AB}$ est obtenu par le théorème de Pythagore :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

❖ **Propriétés :**

Soient deux vecteurs : $\vec{u}\binom{a}{b}$, $\vec{v}\binom{a'}{b'}$ et $k \in R$:

$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix}$

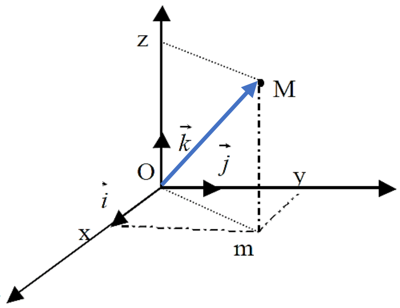
$k\vec{u} \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$

❖ **Corollaire :**

Deux vecteurs $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$ sont colinéaires ssi : *ab'=a'b*.

III. REPERAGE DANS L'ESPACE

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ défini par : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ est représenté dans l'espace comme suit :



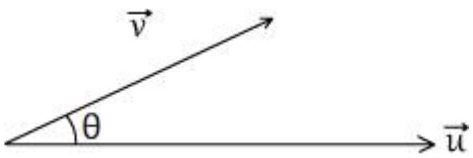
Où : x : abscisse ; y : ordonnée ; z : côte

IV. PRODUIT SCALAIRE

IV.1. Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle ***produit scalaire*** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$, le nombre réel défini par :

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})} \qquad (\vec{u}, \vec{v}) = \theta$$



$\vec{u}.\vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ $\boldsymbol{scalaire}$ $\vec{v}$ ».

Remarque : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Ecrire par exemple

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

IV.2. Expression analytique

En posant u_x, u_y, u_z et v_x, v_y, v_z les composantes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base orthonormée $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est le **scalaire** défini par la relation :

$$\vec{u}.\vec{v} = (u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k})(v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k})$$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z}$$

Car : $\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$

IV.3. Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel α :

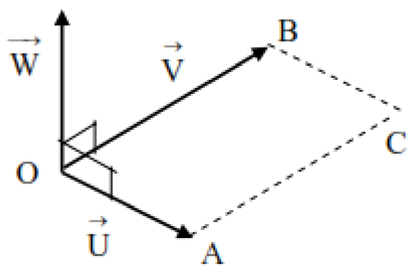
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{w}$
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

IV.4. Orthogonalité, colinéarité et angle

- Orthogonalité : $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux ssi : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$ $(\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB})$
- Colinéarité : $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires ssi : $|\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}| = OA.OB$
- Angle géométrique : $\cos(\widehat{AOB}) = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA.OB}$

V. PRODUIT VECTORIEL

V.1. Définition



Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U} et \vec{V}$ est un **vecteur** $\vec{W}$ noté : $\vec{U} \wedge \vec{V}$

- de direction telle que : $\vec{W} \perp \vec{U}$ et $\vec{W} \perp \vec{V}$ ($\vec{W}$ est perpendiculaire au plan contenant les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.
- $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ est une base directe.
- de module :

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\sin(\vec{U}, \vec{V})$$

V.2. Expression analytique

En posant U_x, U_y, U_z et V_x, V_y, V_z les composantes respectives de $\vec{U} et \vec{V}$ dans la base orthonormée $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le **vecteur** défini par la relation :

$$\overrightarrow{W}=\vec{U}\wedge\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ U_x & U_y & U_z\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}=\underbrace{\left(U_yV_z-U_zV_y\right)}_{W_x}\vec{i}+\underbrace{\left(U_zV_x-U_xV_z\right)}_{W_y}\vec{j}+\underbrace{\left(U_xV_y-U_yV_x\right)}_{W_z}\vec{k}$$

V.3. Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ *et* $\vec{W}$:

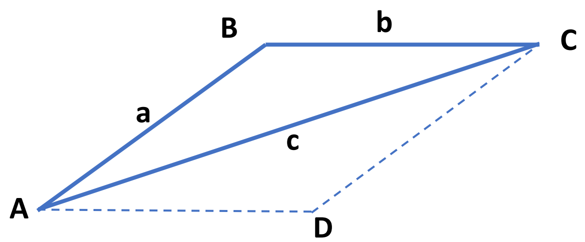
- Non commutativité : $\vec{U}\wedge\vec{V}=-\vec{V}\wedge\vec{U}$;
- Distributivité par rapport à l'addition $\left(\vec{U}+\vec{V}\right)\wedge\overrightarrow{W}=\vec{U}\wedge\overrightarrow{W}+\vec{V}\wedge\overrightarrow{W}$;
- Linéarité : $\left(\alpha\vec{U}\right)\wedge\left(\beta\vec{V}\right)=(\alpha\beta)\cdot\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)$ $(\alpha$ et β étant des scalaires$)$.

Remarque :

Si $\vec{U}et\,\vec{V}$ sont colinéaires ($\vec{U}\,//\,\vec{V}$) : $\vec{U}\wedge\vec{V}=0$ $(\sin(\vec{U},\vec{V})=0)$.

V.4. Application du produit vectoriel

V.4.1. Surface d'un triangle et d'un parallélogramme



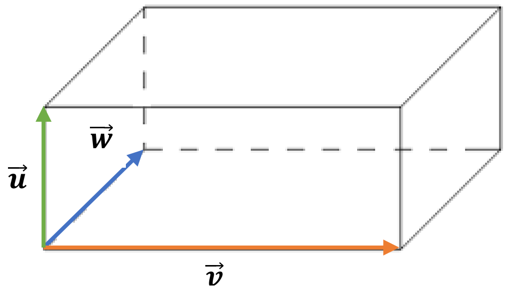
La surface (l'aire) du triangle ABC se calcule comme suit :

$$S=\frac{1}{2}\,ac\sin\hat{A}=\frac{1}{2}\,ab\sin\hat{B}=\frac{1}{2}\,bc\sin\hat{C}$$

$$\boldsymbol{Aire\ (ABC)}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right\|$$

$$\boldsymbol{Aire\ (ABCD)}=\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right\|$$

V.4.2. Volume d'un parallélépipède



Le volume du parallélépipède est le produit mixte des 3 vecteurs $\vec{u}\,, \vec{v}\ et\ \ \vec{w}$:

$Volume = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$

$Volume = \vec{v}.(\vec{u} \wedge \vec{w})$

$Volume = \vec{w}.(\vec{u} \wedge \vec{v})$