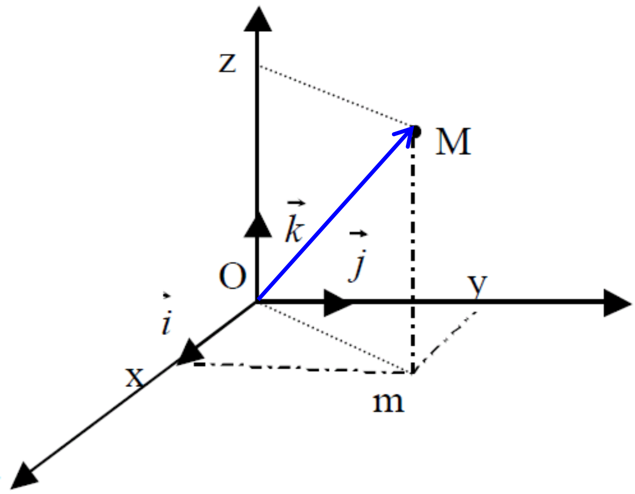
CINEMATIQUE

Définition

La cinématique est l'étude des mouvements des masses indépendamment des causes qui les engendrent.

Nous limiterons notre étude de la mécanique à l'étude du mouvement des points matériels. Par définition un point matériel est un objet sans dimensions spatiales. Bien entendu, dans la plupart des cas, il s'agit d'une simplification, les objets réels occupent généralement un certain espace. Néanmoins, ce concept est utile dans bon nombre de situations réelles où on ne s'intéresse pas aux rotations de l'objet sur lui-même ou lorsque les dimensions de l'objet peuvent être négligées.

I. Vecteur position



La position d'un mobile à un instant t est déterminée, par rapport à un repère, par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ qu'on appelle vecteur position. Son origine est le centre du repère O et son extrémité est le mobile M. Suivant le repère cartésien dans l'espace $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le vecteur position s'écrit :

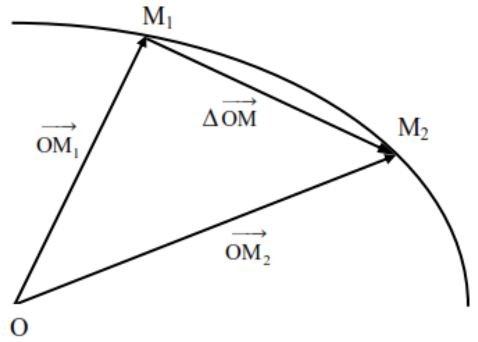
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

x est la projection de M sur l'axe (ox).
y est la projection de M sur l'axe (oy).
z est la projection de M sur l'axe (oz).
x,y et z sont appelés coordonnées du point M

Comme le point M est en mouvement, sa position varie a le temps, donc ses coordonnées sont fonction du temps t.

$$\left.\begin{array}{l} x=f(t) \\ y=f(t) \\ z=f(t) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{Equations paramétriques} \\ \text{ou} \\ \text{Equations horaires} \end{array}$$

II. Vecteur déplacement



Soient deux points M_1 à un instant t et un autre M_2 à un instant (t+dt) :

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$$ (relation de Chasles)

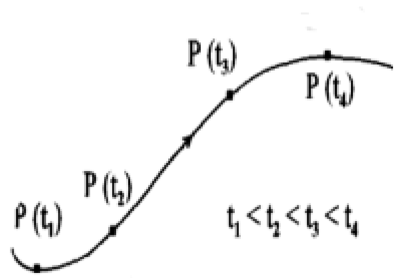
Le mouvement qui se fait du point M_1 au point M_2 est caractérisé par le vecteur déplacement :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

III. Trajectoire

La trajectoire d'un point mobile M dans un repère donné est la courbe formée par l'ensemble des positions successives du point M dans ce repère.
La trajectoire d'un point mobile dépend du référentiel choisi.



Mathématiquement, c'est la relation qui lie les coordonnées x, y et z entre eux indépendamment du temps. Cette équation est obtenue en éliminant le temps entre les différents coordonnées ou équations horaires.

x=f(y,z) ou y=g(x,z) ou encore z=h(x,y)

Application 1 :

On considère un point matériel M se déplaçant dans un référentiel $\Re(O,xyz)$ muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Les coordonnées du point M dans le référentiel $\Re$ sont données par :

$$\begin{cases} x = v_0 t & (1) \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 & (2) \\ z = 0 & (3) \end{cases}$$

Donner l'équation de la trajectoire de M dans $\Re$. En déduire sa nature.

Solution

$(1) \rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0}$; on remplace dans (2), on obtient :

$(2) \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} \frac{g}{{v_0}^2} x^2$

Donc la trajectoire décrit par le point M est une parabole.

Application 2 :

Même question pour un point matériel M ayant les coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} x = \cos t^2 & (1) \\ y = \sin t^2 & (2) \\ z = 0 & (3) \end{cases}$$

Solution

$$x^2 + y^2 = (\cos t^2)^2 + (\sin t^2)^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

La trajectoire est un cercle de centre O (0 ;0) et de rayon R=1 dans le plan Oxy.

IV. Vitesse d'un point matériel

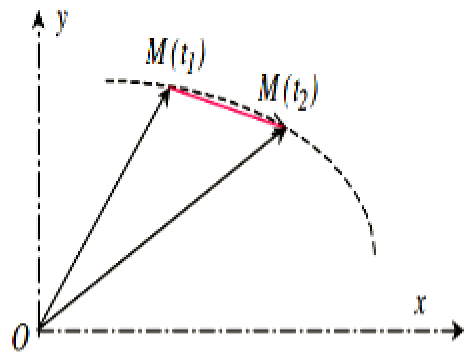
La vitesse est vectorielle car le mouvement d'un point matériel se caractérise par une direction et un sens. On distingue deux vitesses, une vitesse moyenne et une vitesse instantanée.

IV.1. Vitesse moyenne

La vitesse d'un mobile caractérise la variation de sa position au cours du temps. Soient deux positions du mobile M_1 et M_2 à deux instants t_1 et t_2 ($t_2 > t_1$). La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_1 et t_2 est donnée par :

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t}$$

Le vecteur $\vec{v}_m$ est parallèle au vecteur déplacement.



En valeurs algébriques, et dans le cas d'un mouvement rectiligne sur un axe (Ox):

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

où x_1 et x_2 sont les coordonnées des points M_1 et M_2 .

la vitesse moyenne scalaire est donnée par le rapport : $v_m = \frac{Distance\ parcourue}{Temps\ mis} = \frac{D}{\Delta t}$

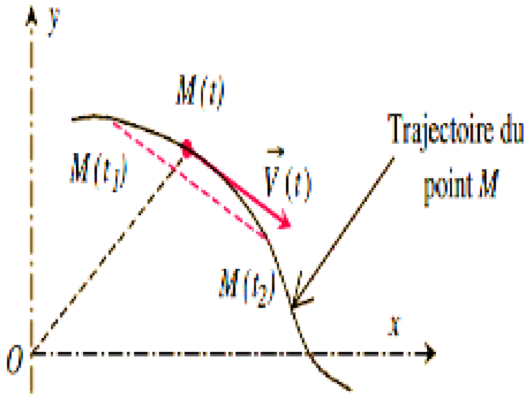
IV.2. Vitesse instantanée

Dans la plupart des cas, le mouvement ne se fait pas à une vitesse constante. A chaque instant, on aura une situation de la vitesse, on parlera de vitesse instantanée. C'est la limite de la vitesse moyenne lorsque la différence du temps est très petite cela veut dire qu'elle tend vers zéro.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\boldsymbol{\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

$\vec{v}$ est la dérivée du vecteur position par rapport au temps, il en résulte que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. Son sens est celui du mouvement.



En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

Son module (norme) est :

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

V. Accélération d'un point matériel

La vitesse pouvant varier avec le temps, on caractérise ce changement en introduisant la notion d'accélération. Ici aussi, on distingue deux accélérations, une accélération moyenne et une accélération instantanée.

V.1. Accélération moyenne

L'accélération moyenne est la variation de la vitesse entre deux positions par rapport au temps. Soit v_1 la vitesse du mobile à un instant t_1 et v_2 sa vitesse à instant t_2. Le mobile subit une accélération moyenne telle que :

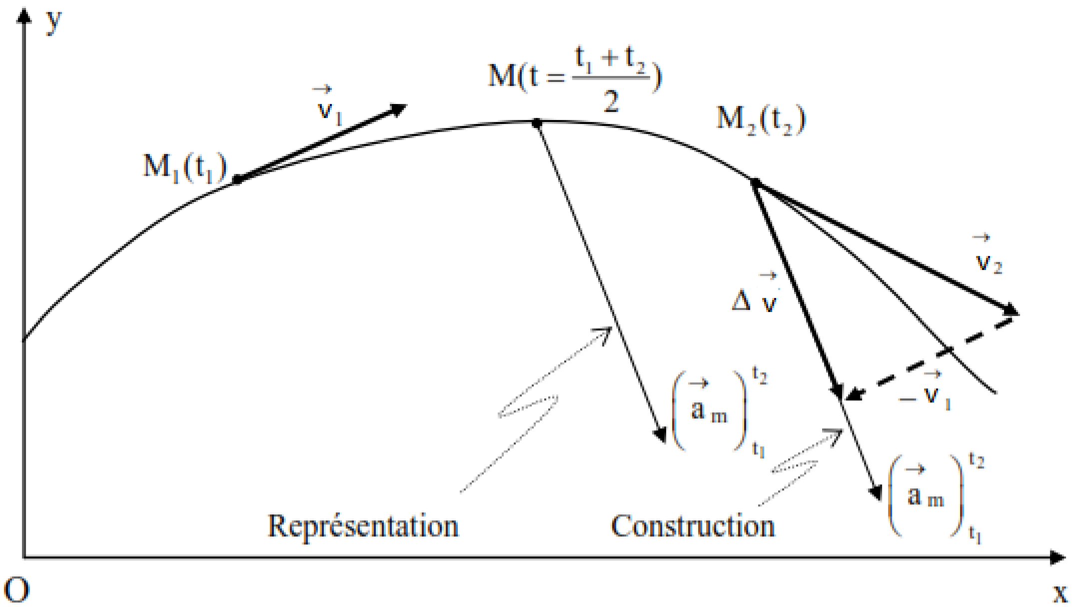
$$\boldsymbol{\vec{a}_m = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}}$$

- Son module est : $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
- Le vecteur accélération a la même direction et le même sens que $\overrightarrow{\Delta v}$.
- Généralement, $\vec{a}_m$ est appliquée au point M où le mobile se trouve à l'instant t, milieu de l'intervalle, soit : $t = \frac{t_1+t_2}{2}$

Dans le repère cartésien, l'accélération moyenne s'écrit :

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{\imath} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{\jmath} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{k} = a_{mx}\vec{\imath} + a_{my}\vec{\jmath} + a_{mz}\vec{k}$$

Remarque : le vecteur $\vec{a}$ est toujours orienté vers le côté concave de la trajectoire.



V.2. Accélération instantanée

L'accélération instantanée est l'accélération à un instant t donné :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Les coordonnées du vecteur accélération suivant les coordonnées cartésiennes sont:
Soit:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$: pente de la tangente du graphe de $v_x(t)$

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$: pente de la tangente du graphe de $v_y(t)$

$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$: pente de la tangente du graphe de $v_z(t)$

Le module de l'accélération est :

$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$

VI. Etude cinématique de mouvements rectilignes particuliers

Rappelons que le mouvement rectiligne se produit en ligne droite (mouvement unidirectionnel suivant l'axe ox).

VI.1. Natures particulières du mouvement rectiligne

- v = constante : le mouvement est rectiligne uniforme ;
- a = constante : le mouvement est rectiligne uniformément varié ;
- $a \,.\, v > 0$: le mouvement est rectiligne accéléré (uniformément si a = constante) ;
- $a \,.\, v < 0$: le mouvement est rectiligne décéléré ou retardé (uniformément si a = constante) ;

VI.2. Mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement est rectiligne uniforme, donc : $v(t) = v_0$

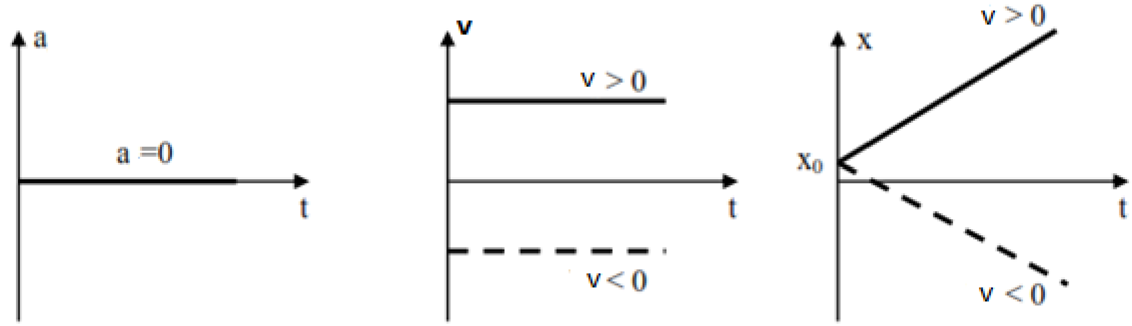
v_0 est la vitesse initiale.

Par conséquent :

- $a = \frac{dv_0}{dt} = 0$
- $\frac{dx}{dt} = v_0$ d'où : $\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_0 dt$

Donc : $$\boldsymbol{x(t) = v_0(t - t_0) + x_0}$$

Diagrammes :



VI.3. Mouvement rectiligne uniformément varié (accéléré ou retardé)

Le mouvement est rectiligne **uniformément** varié, donc : a = constante

Par conséquent :

- $a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a.dt$

En intégrant : $\boldsymbol{v(t) = a(t - t_0) + v_0}$

- $\frac{dx}{dt} = a(t - t_0) + v_0 \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)dt + \int_{t_0}^{t} v_0 dt$

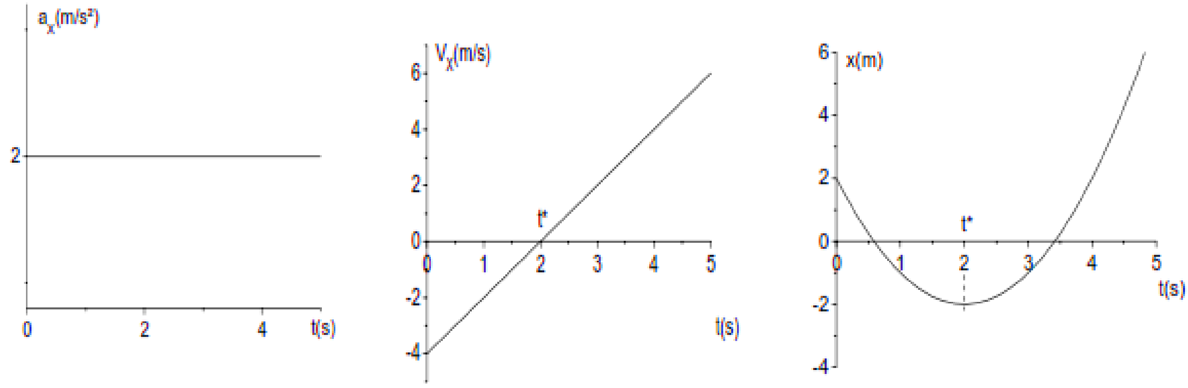
  D'où :

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0}$$

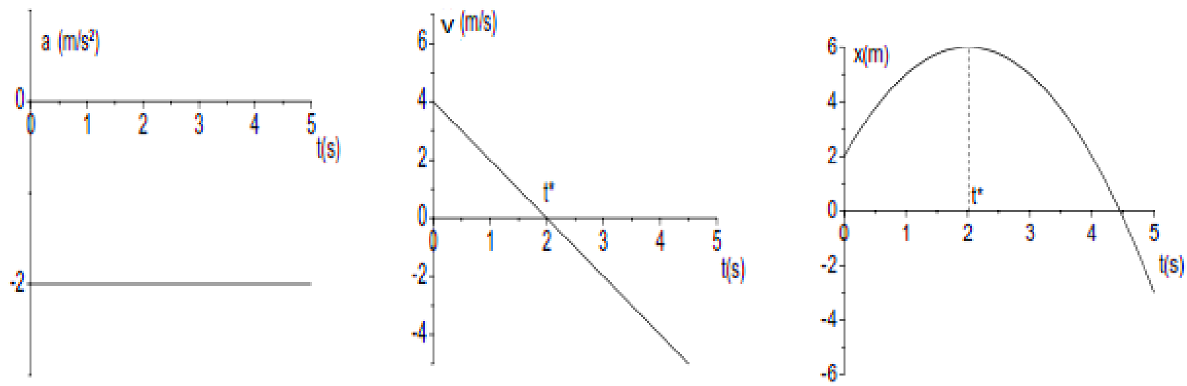
La fonction x(t) est du second degré et la courbe à laquelle elle correspond est une parabole.

Exemples de diagrammes

- **Cas où a > 0 :**



- **Cas où a < 0 :**



VI.4. Formule indépendante du temps

Pour un mouvement uniformément varié, on a vu que :

$v = a(t - t_0) + v_0$

et : $x = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$

En tirant $(t - t_0)$ de la première équation et en la remplaçant dans la deuxième, on trouve :

$$x - x_0 = \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2} + v_0 \frac{v - v_0}{a}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2a}(v^2 - v_0{}^2)$$

On a donc :

$$\boldsymbol{v^2 = v_0{}^2 + 2a(x - x_0)}$$

Remarque : Cette formule n'est valable que pour un mouvement uniformément varié où l'accélération est constante (a = constante).

VII. Applications

Application 1 :

On considère un point matériel M se déplaçant dans un référentiel $\Re(O,xyz)$ muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les coordonnées du point M dans le référentiel $\Re$ sont données par :

$x(t) = t+1$, $y(t) = t^2+1$ et $z(t) = 0$. (t étant le temps)

1) Donner l'équation de la trajectoire de M dans $\Re$. En déduire sa nature.

2) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\Re)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\Re)$ du point M.

Réponse

a) L'équation de la trajectoire :

Soit un point matériel M de coordonnées $x(t), y(t) et\ z(t)\ données\ par$:

$$x(t) = t + 1 \quad (1); \quad y(t) = t^2 + 1 \quad (2) \quad et \quad z(t) = 0 \quad (3).$$

L'équation de la trajectoire de M dans R

(1)→ $t = x(t) - 1$ on remplace dans l'équation (2) on obtient :

(2) ⟹ $y(t) = (x(t) - 1)^2 + 1$.

Donc la trajectoire décrit par le point M est une parabole.

b) Calcul de la vitesse et de l'accélération

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(t+1)}{dt}\vec{\imath} + \frac{d(t^2+1)}{dt}\vec{\jmath}$$

$$\boldsymbol{\vec{v} = 1\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{i}+2t\vec{j})}{dt}$$

$$\boldsymbol{\vec{a} = 2\vec{j}}$$

Application 2 :

Un avion doit atteindre la vitesse de 50 m/s pour pouvoir décoller. En supposant son accélération constante, que doit valoir au minimum celle-ci, si la piste a 625 m de long ? Quel temps l'avion met-il alors pour décoller ?

Réponse

$$a = cst$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = at + v_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

A $t = 0$: $x = x_0 = 0$ et $v = v_0 = 0$

D'où : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 & \Rightarrow \quad t^2 = \frac{2x}{a} \quad (1) \\ v = at & \Rightarrow \quad t = \frac{v}{a} \quad (2) \end{cases}$

(1) et (2) $\rightarrow$ $a = \frac{v^2}{2x}$

A.N : $a = \frac{50^2}{2.\ 625} = \boldsymbol{2\ m/s^2}$

(2) : $t = \frac{50}{2} = \boldsymbol{25\ s}$