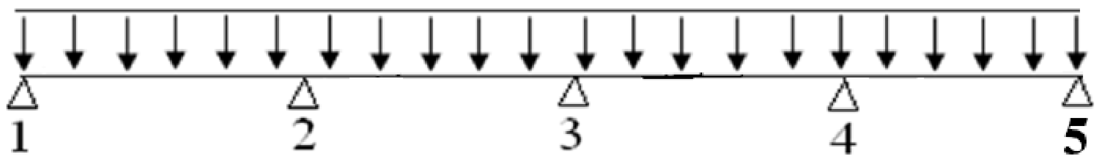
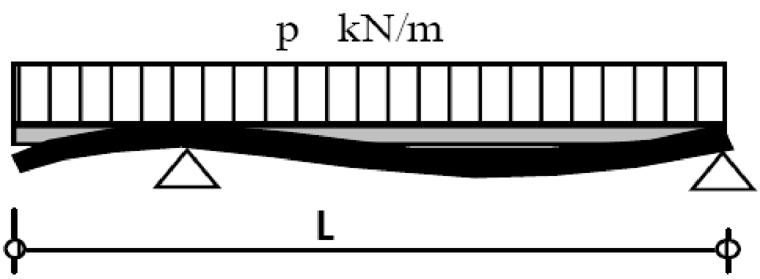
Systèmes Hyperstatiques

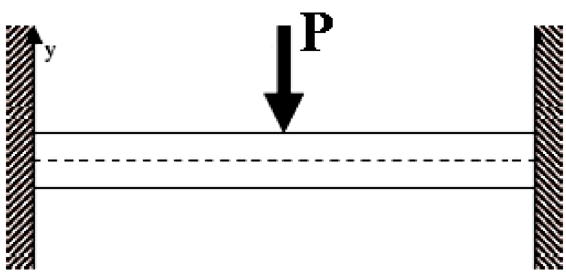
1. Définition:

Une structure est dite hyperstatique lorsque le nombre d'équations et d'efforts internes connus sont insuffisants pour la résoudre. Elle comprend plus d'éléments ou de liaisons qu'il n'est strictement nécessaire pour garantir l'équilibre.





Par exemple, une poutre plane chargée verticalement et fixée à deux encastrements est une structure hyperstatique car même avec la suppression d'un appui la structure reste stable.



2. Degré d'Hyperstaticité des structures planes

Pour les structures hyperstatiques le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Le nombre d'inconnues supplémentaires est appelé degré d'hyperstaticité, noté k.

D'une manière générale, le degré d'hyperstaticité k d'un système plan est donné par :

$$k = (r + 3\, n_{cf}) - (n + q)$$

Où

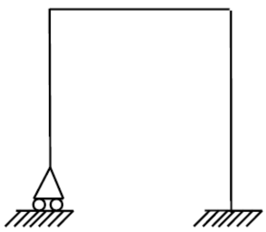
r : nombre des réactions d'appuis ;

n_{cf} : le nombre de cadres fermés ;

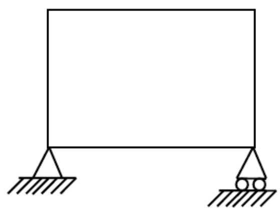
n : nombre d'équations de la statique (en plan n=3 et en espace n=6);

q : nombre d'équations supplémentaires.

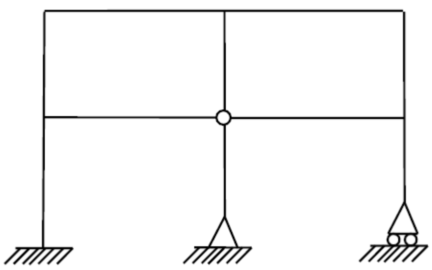
Exemples :



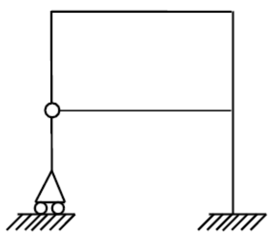
Structure 1 : k = (4+3*0)-(3+0)=1



Structure 2 : k = (3+3*1)-(3+0)=3



Structure 3 : k = (6+2*3)-(3+1)=8



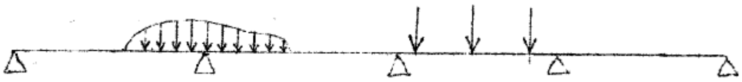
Structure 4 : k = (4+1*3)-(3+1)=3

Une structure est dite continue si elle est formée d'éléments rectilignes dont les extrémités sont réunies par des nœuds rigides.

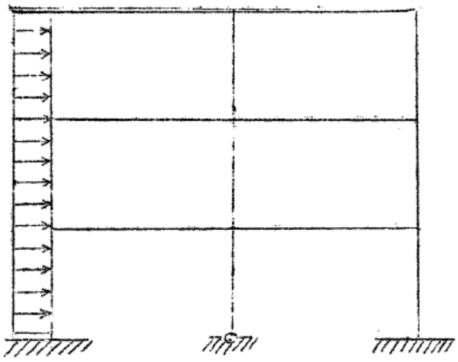
Un nœud est rigide lorsque les éléments qui y aboutissent forment entre eux des angles constants avant et après déformation.

Une travée est un des éléments d'une structure continue limité à deux nœuds consécutifs.

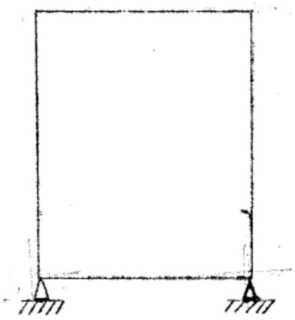
Les plus courantes des structures continues sont les poutres et les portiques et les cadres.



poutre continue



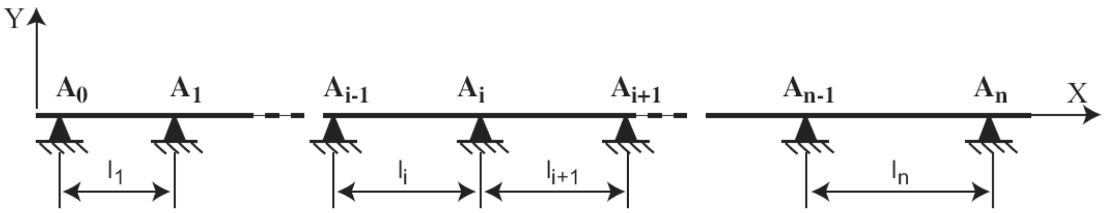
portique



cadre

3. Poutre Hyperstatique

Pour une poutre de n travées, on numérote les appuis de 0 à n. La travée i de portée li est la travée comprise entre les appuis A_{i-1} et A_i , de moment quadratique I_i suivant l'axe de flexion concerné, de module d'Young E. On appellera F_i le chargement extérieur sur la travée i.



Le nombre des inconnues hyperstatiques est égal au nombre des appuis intermédiaires (n −1). On peut choisir comme inconnues hyperstatiques les moments fléchissants sur les appuis intermédiaires.

4. Théorème des Trois Moments ou de CLAPEYRON

On considère deux travées consécutives (i) et (i+1) d'une poutre hyperstatique à n travées, d'inerties flexionnelles respectives EI_i et EI_{i+1}, de longueurs respectives L_i et L_{i+1} et soumises respectivement à des charges F_i et F_{i+1} (voir la figure ci-dessous). De plus, on suppose que les appuis (i-1), (i) et (i+1) subissent des déplacements respectifs d_{i-1}, d_i et d_{i+1} vers le bas,

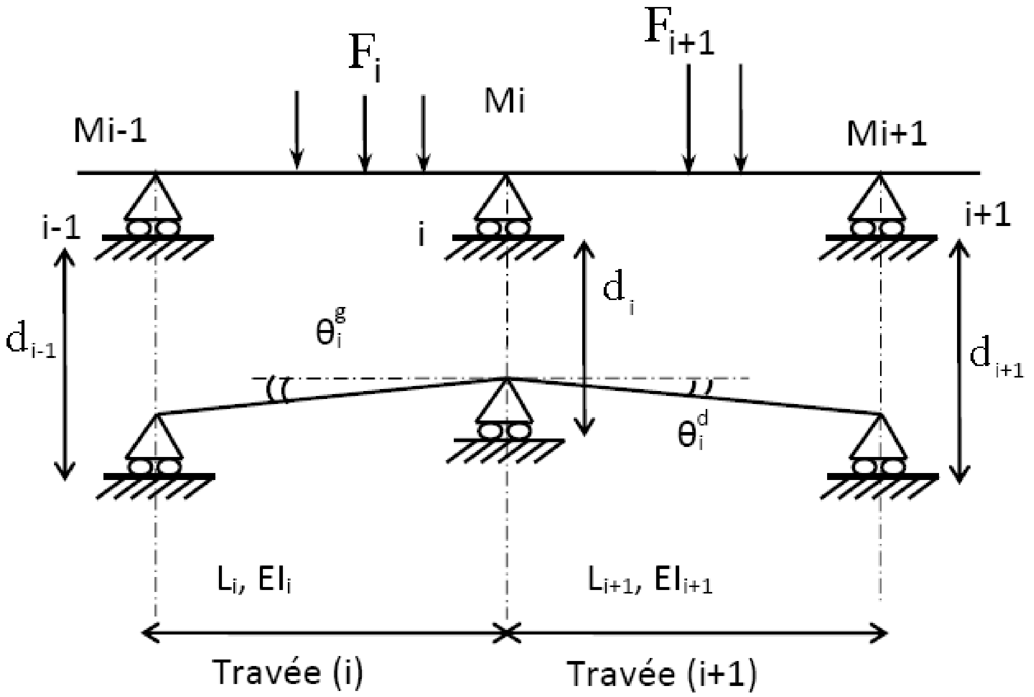


Schéma statique de deux travées successives d'une poutre continue

Où,

θ_i^d la rotation à droite de l'appui i pour la travée (i) considérée indépendante ;

θ_i^g la rotation à gauche de l'appui i pour la travée (i+1) considérée indépendante.

Les formules de **Navier-Bresse** (les formules usuelles de Navier-Bresse donnent les déformations d'une section 2 par rapport à une section 1 :

pour deux travées consécutives s'écrivent :

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \int_0^L M_i\,(x)\,\frac{dx}{EI_i} \qquad (1)$$

$$d_i = d_{i-1} + \theta_{i-1}\,L_i + \int_0^L M_i\,(x)\,(L_i - x)\,\frac{dx}{EI_i} \qquad (2)$$

$$d_{i+1} = d_i + \theta_i\,L_{i+1} + \int_0^{L_{i+1}} M_{i+1}\,(x)(L_{i+1} - x)\,\frac{dx}{EI_{i+1}} \qquad (3)$$

En effectuant $\frac{(3)}{L_{i+1}} - \frac{(2)}{L_i}$, on obtient :

<u>Cas général</u>

$$b_i\,M_{i-1} + (c_i + a_{i+1})\,M_i + b_{i+1}\,M_{i+1} = \theta_i^d - \theta_i^g - \Omega_i + \Omega_{i+1}$$

avec :

$$a_i = \int_0^{L_i} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i}\;;\; b_i = \int_0^{L_i} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right)\left(\frac{x}{L_i}\right) \frac{dx}{EI_i}\;; c_i = \int_0^{L_i} \left(\frac{x}{L_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i}$$

$\Omega_i = \frac{d_i - d_{i-1}}{L_i}$; $\Omega_{i+1} = \frac{d_{i+1} - d_i}{L_{i+1}}$: rotations rigides des appuis i et i+1

<u>Cas où l'inertie de la poutre est constante sur chaque travée (i) et sans dénivellation des appuis :</u>

$a_i = \frac{L_i}{3EI}$, $b_i = \frac{L_i}{6EI}$, $c_i = \frac{L_i}{3EI}$ d'où la formule des trois moments :

$$\frac{L_i}{EI_i} M_{i-1} + 2\left(\frac{L_i}{EI_i} + \frac{L_{i+1}}{EI_{i+1}}\right) M_i + \frac{L_{i+1}}{EI_{i+1}} M_{i+1} = 6\left(\theta_i^d - \theta_i^g\right)$$

5. Expressions du Moment Fléchissant, Effort Tranchant et Réactions D'appuis

Pour la travée (i) située entre les appuis (i-1) et (i), on peut écrire les relations suivantes:

Le moment fléchissant en travée:

$$M_i^T(x) = m_i(x) + M_{i-1}\left(1 - \frac{x}{L_i}\right) + M_i \frac{x}{L_i}$$

Où,

$m_i(x)$: l'expression du moment fléchissant dû aux chargements extérieurs F_i de la travée (i-1) supposée indépendante.

M_i : moment sur appui (i)

L'effort tranchant en travée:

$$V_i^T(x) = v_i(x) + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i}$$

Où,

$v_i(x)$: expression de l'effort tranchant dû aux chargements extérieurs F_i de la travée (i) supposée indépendante.

M_i : moment sur appui (i)

Réactions d'appuis :

$$R_i = r_i^g + r_i^d + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}}$$

Où,

r_i^g : la réaction à droite de l'appui (i) de la travée isostatique (i)

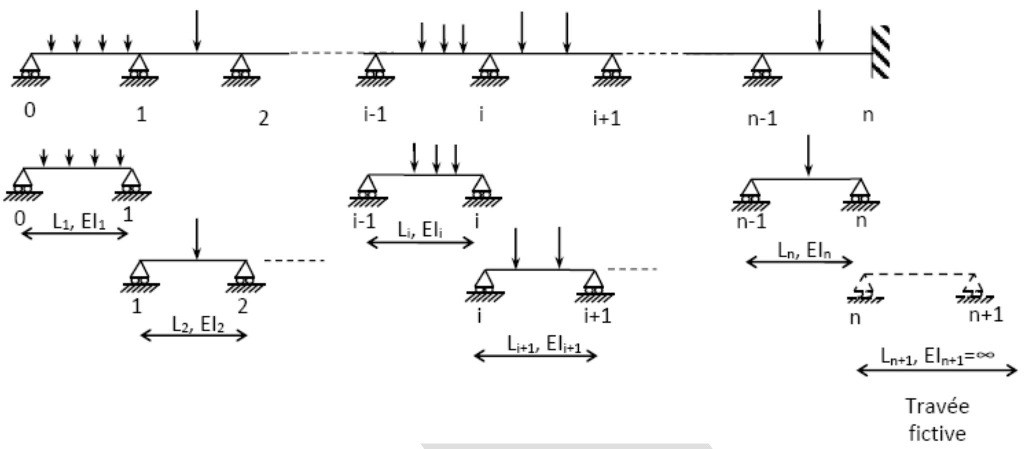
r_i^d: la réaction à gauche de l'appui (i) de la travée isostatique (i+1)

6. Les Etapes de la méthode des Trois Moments

1. Déterminer le degré d'hyperstaticité de la poutre k ;

2. Découper la poutre à (n) travées indépendantes (i) chacune de portée L_i et de rigidité flexionnelle EI_i;

NB : si l'un des appuis de rive est un encastrement, on le remplace par une travée fictive de rigidité flexionnelle infinie EI = ∞. (Voir figure ci-dessous)



Décomposition de la poutre continue en travées indépendantes

3. Pour chaque poutre isostatique de travée (i), déterminer :

- les réactions des appuis : r_i^d et r_i^g
- les expressions efforts internes : l'effort tranchant v (x) et le moment fléchissant m_i (x) ;
- les rotations des appuis : θ_{i-1}^d et θ_i^g

4. Ecrire les k équations de 3 moments pour chaque deux travées consécutives (i) et (i+1):

$$\frac{L_i}{EI_i} M_{i-1} + 2\left(\frac{L_i}{EI_i} + \frac{L_{i+1}}{EI_{i+1}}\right) M_i + \frac{L_{i+1}}{EI_{i+1}} M_{i+1} = 6\,(\theta_i^d - \theta_i^g)$$

5. Résoudre ces équations pour déterminer les moments M_i sur appuis.

6. calculer les réactions et les efforts internes par les formules suivantes :

- Les réactions des appuis :

$$R_i = r_i^g + r_i^d + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}}$$

- L'effort tranchant :

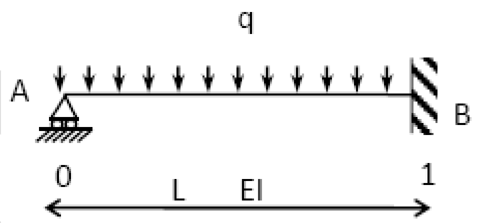
$$V_i^T\,(x)=v_i\,(x)+\frac{M_i\ -M_{i-1}}{L_i}$$

- Le moment fléchissant :

$$M_i^T\,(x)=m_i\,(x)+M_{i-1}\left(1-\frac{x}{L_i}\right)+M_i\,\frac{x}{L_i}$$

7. Application

Soit la structure (S) de la figure ci-contre, simplement appuyée en A et encastrée en B, d'inertie flexionnelle E.I constante et soumise à une charge uniformément répartie q.



1. Calculer le degré d'hyperstaticité de la structure S.

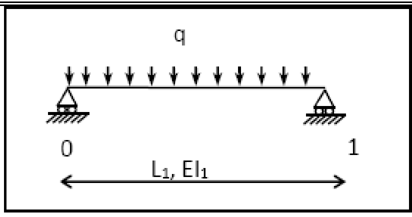
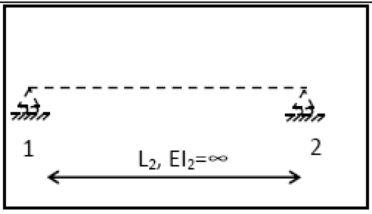
2. Déterminer les expressions des moments aux appuis.

3. Déterminer les expressions des efforts internes le long de S.

Solution :

1. le degré d'hyperstaticité de la poutre k = (4+3x0) – (3+0) = 1

2. les expressions des moments aux appuis

Schéma statique					
L_i		$L_1=L$		$L_2=L$	
EI_i		$EI_1=EI$		$EI_2=\infty$	
Etude des travées isostatiques	$\boldsymbol{r^d_{i-1}}$ **et** $\boldsymbol{r^g_i}$	$r^d_0=\frac{qL}{2}$	$r^g_1=\frac{qL}{2}$	$r^d_1=0$	
	$v_i(x)$	$V_1(x)=\frac{qL}{2}-qx$		-	
	$m_i(x)$	$m_1(x)=\frac{qL}{2}x-\frac{qx^2}{2}$		-	
	$\boldsymbol{\theta^d_{i-1}}$ **et** $\boldsymbol{\theta^g_i}$	$\theta^d_0=\frac{-qL^3}{24EI}$	$\theta^g_1=\frac{qL^3}{24EI}$	$\theta^d_1=0$	-
Moments sur appuis M_i		**M_0=0**	M_1 : inconnu hyperstatique		**M_2=0**
Les équations des 3 moments		$\frac{L_1}{EI_1}M_0+2\left(\frac{L_1}{EI_1}+\frac{L_2}{EI_2}\right)M_1+\frac{L_2}{EI_2}M_2=6\left(\theta^d_1-\theta^g_1\right)\rightarrow \boldsymbol{M_1}=-\frac{\boldsymbol{qL^2}}{\boldsymbol{8}}$			

3. Les expressions des efforts internes le long de S

Appuis		0	1		
Etude poutre continue	**M_i**	**M_0=0**	$\boldsymbol{M_1}=-\frac{\boldsymbol{qL^2}}{\boldsymbol{8}}$		**M_2=0**
	R_i	$R_0=\frac{qL}{2}+\frac{M_1-M_0}{L_1}$ $\boldsymbol{R_0}=\frac{\boldsymbol{3qL}}{\boldsymbol{8}}$	$R_1=\frac{qL}{2}+\frac{M_0-M_1}{L_1}$ $\boldsymbol{R_1}=\frac{\boldsymbol{5qL}}{\boldsymbol{8}}$	-	-
	V_i(x)	$V_1(x)=\frac{qL}{2}-qx+\frac{M_1-M_0}{L_1}$ $\boldsymbol{V_1(x)=3\frac{qL}{8}-qx}$		-	-
	Mi(x)	$M_1(x)=\frac{qL}{2}x-\frac{qx^2}{2}+M_0\left(1-\frac{x}{L_1}\right)+M_0\frac{x}{L_1}$ $\boldsymbol{M_1(x)=\frac{3qL}{8}x-\frac{qx^2}{2}}$		-	-