

UNIVERSITE FERHAT ABBESS ,SETIF 1
INSTITU D'ARCHITECTURE ET DES SCIENCES
DE LA TEERE
DEPARTEMENT DE
GEOGRAPHIE ET AMENAGEMENT DE LA TERRITOIRE

MODULE MATHEMATIQUES 1

MOUSSAOULI.N

BOUGUETTOUCHA.K

2020/2021

Chapitre 1

Espace vectoriel

1.1 Définition et vocabulaire :

- Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
- Soit E un ensemble dont les éléments sont appelés : des vecteurs.

Définition 1 *Un espace vectoriel est un ensemble sur lequel sont définies :*

- Une addition interne (on peut ajouter entre eux deux éléments de l'ensemble et cela donne un élément de l'ensemble : $u \in E, v \in E \implies u + v \in E$)
- Une multiplication externe (on peut multiplier un élément de l'ensemble par un nombre réel et cela donne un élément de l'ensemble : $\lambda u \in E, \lambda \in \mathbb{R}$)

Définition 2 *On dit que E un espace vectoriel (e.v) sur $\mathbb{R}$ si E muni d'une addition $(+)$ et d'une multiplication externe $(\times)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\forall u, v, w \in E, u + (v + w) = (u + v) + w.$
2. $\exists e \in E, \forall v \in E, v + e = e + v = v.$
3. $\forall v \in E, \exists v' \in E : v + v' = v' + v = e.$
4. $\forall v, w \in E, v + w = w + v.$
5. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in E, \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v.$

6. $\forall v \in E, 1v = v$
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in E, (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v.$
8. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v, w \in E, \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w.$

Exemple 1 L'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ est un ev pour les opérations :

$$\oplus : (x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$$

$$\otimes : \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

1.2 Sous espace vectoriel

E est un espace vectoriel, soit $F \subset E$ un s.e.v si :

1. $0_E \in F$ ($F \neq \emptyset$).
 2. $\forall x \in F, \forall y \in F \implies x + y \in F.$
 3. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall x \in F \implies \lambda x \in F.$
- L'intersection de deux espaces vectoriel est un s.e.v.
 $E \text{ ev } F \text{ ev} \implies E \cap F \text{ est un s.e.v.}$
 - La réunion de deux espaces vectoriel n'est pas un s.e.v.
 $E \text{ et } F \text{ des ev} \implies E \cup F \text{ est un s.e.v.}$

1.3 Dépendance et indépendance linéaire

1.3.1 Combinaison linéaire

Soient $v_1, v_2, \dots, v_n$, n vecteurs d'un e.v E . On appelle "**combinaison linéaire**" de $v_1, v_2, \dots, v_n$, tout vecteur s'écrivant :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

ou : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des réels.

Exemple 2 Considérons les 3 vecteurs suivants : $u = (-1, -2, 3), v = (0, 2, 1), w = (-1, 0, 4)$; Montrer que w est une combinaison linéaire des vecteurs u et v .

C-à-d : $w = \alpha u + \beta v$.

$$(-1, 0, 4) = \alpha(-1, -2, 3) + \beta(0, 2, 1)$$

$$(-1, 0, 4) = (-\alpha, -2\alpha, 3\alpha) + (0, 2\beta, \beta)$$

On a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -1 = -\alpha & \dots(1) \\ 0 = -2\alpha + 2\beta & \dots(2) \\ 4 = 3\alpha + \beta & \dots(3) \end{cases}$$

de (1) on a : $\alpha = 1$, en remplace dans (2) :

$$-2 + 2\beta = 0 \implies \beta = 1$$

Donc : $w = u + v$.

1.3.2 Familles liées, familles libres

Définition 3 Soit E un e.v

On dit que la famille finie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est libre (linéairement indépendant) si et seulement si :

$$\forall \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n; \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E \implies \lambda_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0$$

Exemple 3 $E = \mathbb{R}^3, u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (2, 1, -1)$ la famille $\{u_1, u_2\}$ est libre, car :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_E$$

$$\iff \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(2, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\iff (\lambda_1, 0, \lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ 0 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0} \text{ donc } \lambda_i = 0 \\ \Rightarrow \{u_1, u_2\} \text{ libre.} \end{aligned}$$

Exemple 4 $E = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (2, 1)$, $v_3 = (-1, 0)$ la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée, car : $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_E$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(2, 1) + \lambda_3(-1, 0) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2) + (-\lambda_3, 0) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -\lambda_2} \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \lambda_3}$$

donc les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont liées.

1.3.3 Familles génératrices, bases

Définition 4 Soit E un e.v, G une famille d'éléments de E , on dit que G est une famille génératrice de E (ou G engendre E) ssi : $G = \text{Vect } G = E$.

Définition 5 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et soient $v_1, v_2, \dots, v_n \in E$

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$, on le note $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ou $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$; et on l'appelle "le sous espace engendré par les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ ".

$$\text{On a donc : } \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n / \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

Il est claire que $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) \subset E$.

Remarque 1 $v \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \Leftrightarrow v$ est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Définition 6 On dit qu'une famille $\mathfrak{B}$ d'éléments d'un $\mathbb{K}$ e.v est une base de E ssi $\mathfrak{B}$ est libre et génératrice de E .

- Une base de E n'est pas toujours existe ni unique.
- Si $E = Vect(v_1, v_2, \dots, v_n)$ alors E admet au moins une base $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ avec $m \leq n$; et toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs m . Ce nombre unique m ; noté $\dim E$; est appelé : **La dimension de E** .
- Si $v_1, v_2, \dots, v_n$ sont libres, alors par définition $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base de E et donc $\dim E = n$.
- Notons que si $E = Vect(v)$; ou $v \neq 0_E$ alors $\{v\}$ est une base de E donc $\dim E = 1$.
- Pour l'ev $\mathbb{K}^n$; appelé : la base canonique de $\mathbb{K}^n$ ou : $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$.
- Si $\dim E = n$ alors $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base de $E \iff E = Vect(v_1, v_2, \dots, v_n) \iff v_1, v_2, \dots, v_n$ sont libres.

Exemple 5 Soient dans l'e.v., $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 1, 0)$

(i) Montrons que $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\mathbb{R}^3 = Vect(v_1, v_2, v_3)$ et v_1, v_2, v_3 sont libres).

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, alors il suffit de montrer seulement que les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont libres.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0, 0, 0) \iff \lambda_1(0, 1, 1) + \lambda_2(1, 0, 1) + \lambda_3(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\iff (0, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 0, \lambda_2) + (\lambda_3, \lambda_3, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\iff (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \dots(1) \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & \dots(2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \dots(3) \end{cases}$$

De (1) on a : $\lambda_2 = -\lambda_3$ et de (2) on a $\lambda_1 = -\lambda_3$. Puis en remplaçant ces valeurs dans

(3) on obtient $-2\lambda_3 = 0$ d'où $\lambda_3 = 0$ et donc $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$

Ceci signifie que les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont libres; d'où $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Définition, propriétés et exemples

Rappelons qu'une application $f : E \longrightarrow F$ d'un ensemble E vers un ensemble F associe à tout élément $x \in E$ un élément et un seul $y \in F$.

Définition 7 Soient E, F deux e.v sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **linéaire** si :

1. Pour tous $u, v \in E$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $v \in E$, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Proposition 1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v, $f : E \longrightarrow F$ une application, f est linéaire si et seulement si :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E :$$

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Exemple 6 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longrightarrow (x + y + z, x - y, x + z)$ est linéaire, car :

1. $\forall u, v \in E, f(u + v) = f(u) + f(v)$
Soient $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
f(u+v) &= f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x+x', y+y', z+z') \\
\text{On pose } X &= x+x', Y = y+y', Z = z+z' \\
&= f(X, Y, Z) = (X+Y+Z, X-Y, X+Z) \\
&= ((x+x') + (y+y') + (z+z'); (x+x') - (y+y'); (x+x') + (z+z')) \\
&= (x+y+z+x'+y'+z'; x-y+x'-y'; x+z+x'+z') \\
&= (x+y+z; x-y; x+z) + (x'+y'+z'; x'-y'; x'+z') \\
&= f(x, y, z) + f(x', y', z') \\
&= f(u) + f(v)
\end{aligned}$$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(\lambda v) = \lambda f(v)$

$$\begin{aligned}
f(\lambda v) &= f(\lambda(x, y, z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\
\text{On pose } X &= \lambda x, Y = \lambda y, Z = \lambda z \\
&= f(X, Y, Z) = (X+Y+Z, X-Y, X+Z) \\
&= (\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda z) = (\lambda(x+y+z), \lambda(x-y), \lambda(x+z)) \\
&= \lambda(x+y+z, x-y, x+z) = \lambda f(x, y, z) = \lambda f(v).
\end{aligned}$$

Exemple 7 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longrightarrow x^2$ n'est pas linéaire, car :

1. Soient $u = (x), v = (x') \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(u+v) &= f((x) + (x')) = f(x+x') \\
\text{On pose } X &= x+x' \\
&= f(X) = X^2 = (x+x')^2 = (x^2 + x'^2 + 2xx') \\
&\neq f(x) + f(x') \\
&\text{donc } f \text{ n'est pas linéaire.}
\end{aligned}$$

- On désigne $\mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble des applications linéaires de E vers F (qui est un e.v. sur $\mathbb{K}$).
- Si $E = F$, alors on désigne $\mathcal{L}(E)$ au lieu $\mathcal{L}(E, E)$.
- Si $f : E \rightarrow F$: est une application linéaire, alors on a $f(0_E) = 0_F$ (la réciproque est fausse).
- Si $f(0_E) \neq 0_F$ alors $f : E \rightarrow F$ n'est pas une application linéaire.

2.2 Noyau, Image, le rang :

Définition 8 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$ -e.v

Le noyau (qu'on note **Kerf**) de $f : E \rightarrow F$ est la partie

$$\text{Ker } f = \{v \in E \mid f(v) = 0_F\}$$

qui est un s.e.v. de E .

Définition 9 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$ -e.v

L'Image (qu'on note **Im f**) de $f : E \rightarrow F$ est la partie

$$\text{Im } f = \{f(v) \mid v \in E\}$$

qui est un s.e.v. de F .

- Si $f : E \longrightarrow F$ est l'application linéaire nulle (i.e. $f(v) = 0_F, \forall v \in E$), alors $\text{Ker } f = E$ et $\text{Im } f = \{0_F\}$.
- L'application identité de E i.e., Id_E est linéaire où $\text{Ker}\{\text{Id}_E\} = 0_E$ et $\text{Im}(\text{Id}_E) = E$.

Définition 10 Si f est linéaire ; le nombre $\dim(\text{Im } f)$ est appelé « **le rang de f** » ; et on le note $\text{rg}(f)$

i.e. : $\boxed{\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)}$.

Théorème 1 (Théorème de rang)

Si $f : E \longrightarrow F$: est linéaire, alors :

$$\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$$

Exemple 8 On va calculer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ et le rang de f pour l'exemple précédent :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longrightarrow (x + y + z, x - y, x + z)$ est linéaire

1. On détermine $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ (i.e. on les écrit comme des sous-espaces engendrés par des vecteurs).

$$\begin{aligned}\text{Ker } f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x + y + z, x - y, x + z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x - y = 0 \text{ et } x + z = 0\}\end{aligned}$$

(Autrement dit ; on résoudra le système :

$$\begin{aligned}\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x - y &= 0 \\ x + z &= 0 \end{cases} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = x \text{ et } z = -x\} \\ &= \{(x, x, -x) / x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 1, -1) / x \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$$\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 1, -1))$$

$$\begin{aligned}2. \text{ On a : } \text{Im } f &= \{f(x, y, z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x + y + z, x - y, x + z) / x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, x, x) + (y, -y, 0) + (z, 0, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 1, 1) + y(1, -1, 0) + z(1, 0, 1) / x, y, z \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$$\text{Im } f = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 1))$$

3. Le rang de $f : \text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$

On a $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 1, -1))$ et $(1, 1, -1)$ est libre, donc $\{(1, 1, -1)\}$ est une base de $\text{Ker } f$ d'où $\dim(\text{Ker } f) = 1$, Il est claire que : $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, Par suite, d'après le théorème de rang, on a :

$$\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(K \operatorname{erf}) + \dim(Im f)$$

$$\dim(Im f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(K \operatorname{erf})$$

$$= 3 - 1 = 2$$

$$\dim(Im f) = rg(f) = 2$$

Chapitre 3

Matrices et Déterminants

3.1 Matrices

Définition 11 On appelle matrice $A_{n,p}$ ($n, p \in \mathbb{N}$) à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathcal{R}$ tout tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes.

$$A_{n,p} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemple 9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes ($n = 3$) et 4 colonnes ($p = 4$).

Remarque 2 si $n = p$, alors $A_{n,n}$ est dite matrice carrée d'ordre n .

Définition 12 Soit A une matrice carrée d'ordre n .

1. On dit que A est triangulaire supérieure si et seulement si

$$i > j \implies a_{i,j} = 0.$$

Exemple 10 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

2. On dit que A est triangulaire inférieure si et seulement si

$$i < j \implies a_{i,j} = 0.$$

Exemple 11 $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

3. On dit que A est diagonale si et seulement si

$$i \neq j \implies a_{i,j} = 0.$$

Exemple 12 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

Définition 13 L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$. Si $n = p$, alors $\mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{R}$. il est également noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.1.1 Transposée-Matrice symétrique et anti-symétrique

Soit $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

- On appelle matrice transposée de A , la matrice notée A^T et définie par

$$A^T = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ où } b_{i,j} = a_{j,i}$$

Exemple 13 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ donc $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Remarque 3 Si $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$, alors $A^T \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$.

- On dit que A est une matrice symétrique si et seulement si

$$\begin{cases} A \text{ est carrée} \\ A^T = A \end{cases}$$

Exemple 14 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$. La matrice A est donc symétrique.

- On dit que A est une matrice anti-symétrique si et seulement si

$$\begin{cases} A \text{ est carrée} \\ A^T = -A \end{cases}$$

3.1.2 Opérations sur les matrices

1. Somme de matrices

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ telles que $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$. La somme de A et B est la matrice $A + B \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ telle que

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple 15 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Produit extérieur

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le produit extérieur de la matrice A et du scalaire λ est la matrice $\lambda A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple 16 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. Produit de matrices

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq q}} \in \mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{R})$ (le nombre des colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B).

La matrice produit $AB \in \mathcal{M}_{(n,q)}(\mathbb{R})$ (AB a le nombre de lignes de A et le nombre de colonnes de B) est définie par

$$AB = (\gamma_{i,k})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq q}} \text{ où } \gamma_{i,k} = \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk}$$

ce qui veut dire que γ_{ik} provient de la multiplication de la ligne i de A par la colonne k de B .

Exemple 17 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,2)}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,4)}(\mathbb{R})$.

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque 4 $AB \neq BA$ nécessairement. En effet, dans l'exemple précédent, on ne peut même pas calculer BA .

3.1.3 Matrices unité-Matrice inversible

- On appelle matrice unité (identité) d'ordre n la matrice carrée diagonale d'ordre n notée

$$I_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \text{ telle que } \begin{cases} a_{ii} = 1 \\ a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AI_n = I_n A = A.$$

- On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

Dans ce cas, B est dite "matrice inverse de A " et elle sera notée A^{-1} .

Remarque 5 – $(I_n)^{-1} = I_n, \forall n \geq 0$.

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.1.4 Rang d'une matrice

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & & & V_p \\ a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1p} & L_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2p} & L_2 \\ . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{np} & L_n \end{pmatrix}$$

On appelle " rang de la matrice A " noté $rg(A)$, le nombre maximal des vecteurs lignes ou de vecteurs colonnes qui sont linéairement indépendants, ce qui signifie l'étude de l'indépendance linéaire de l'une des familles de vecteurs suivantes : $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ ou $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$.

De ce qui précède

$$rg(A) \leq \min(n, p)$$

Exemple 18 Donner le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On sait que $rg(A) \leq 2$. On considère les lignes $L_1 = (1, 2, 1, 3)$ et $L_2 = (1, 0, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^4$, ainsi que les scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\implies \lambda_1(1, 2, 1, 3) + \lambda_2(1, 0, 2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Ce qui veut dire que L_1 et L_2 sont linéairement indépendants et, par conséquent,

$$\text{rg}(A) = 2.$$

Exemple 19 Donner le rang de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs colonnes $V_1 = (1, 2, 1)$, $V_2 = (0, 1, 1)$ et $V_3 = (2, 4, 2)$ de $\mathbb{R}^3$ ainsi que les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

$$\implies \lambda_1(1, 2, 1) + \lambda_2(0, 1, 1) + \lambda_3(2, 4, 2) = (0, 0, 0)$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \lambda_1 = -2\lambda_3, \lambda_2 = 0.$$

Donc, les vecteurs V_1, V_2 et V_3 sont linéairement dépendants et $\text{rg}(A) \neq 3$. On élimine un vecteur colonne (par exemple V_1) et on étudie l'indépendance linéaire des vecteurs restants. Pour tout $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$; on a :

$$\lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

$$\implies \lambda_2(0, 1, 1) + \lambda_3(2, 4, 2) = (0, 0, 0)$$

$$\implies \begin{cases} 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

D'où, $\text{rg}(A) = 2$.

Proposition 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n . Alors,

$$A \text{ est inversible} \iff \text{rg}(A) = n$$

Exemple 20 Dans l'exemple précédent, on constate que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ($n = 3$) et que $\text{rg}(A) = 2$. On conclue que A n'est pas inversible.

3.2 Déterminants

Définition 14 Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle "déterminant de la matrice A " noté $|A|$ ou $\det(A)$, le nombre réel défini par :

- Pour $n = 1$: $A = (a)$ et alors $|A| = a$.
- Pour $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et alors

$$|A| = ad - cb$$

- Pour $n \geq 3$: $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et alors

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} |A_{ij_0}|$$

où A_{ij_0} est la matrice obtenue par l'élimination de la ligne i et de la ligne j_0 de la matrice A et j_0 est fixé. Ceci veut dire que le déterminant de A est calculé selon la colonne j_0 .

Aussi,

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i_0+j} a_{i_0j} |A_{i_0j}|$$

où A_{i_0j} est la matrice obtenue par l'élimination de la ligne i_0 et de la ligne j de la matrice A et i_0 est fixé. Ceci veut dire que le déterminant de A est calculé selon la

ligne i_0 .

Exemple 21 Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. $|A| = (-1 \times 3) - (-2 \times 2) = -3 + 4 = 1.$

2. Pour la matrice B , nous calculons $|B|$ selon la première ligne ($i_0 = 1$). On obtient :

$$\begin{aligned} |B| &= +0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1((1 \times 1) - (1 \times 2)) + 3((1 \times 1) - (4 \times 2)) \\ &= (1 \times -1) + (3 \times -7) = -22. \end{aligned}$$

Remarque 6 Afin de faciliter le calcul d'un déterminant, il vaut mieux choisir la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros.

3.2.1 Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $|A| \neq 0$. Alors, A est inversible et l'on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Com}(A))^T.$$

où $\text{Com}(A)$ est une matrice dite "Comatrice de A " ou "matrice des cofacteurs de A "; elle est donnée par :

$$\text{Com}(A) = (\text{cof } A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ avec } \text{cof } A_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|.$$

Nous rappelons que A_{ij} est la matrice obtenue par l'élimination de la ligne i et de la colonne j de la matrice A .

Exemple 22 Donner l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

– On commence par calculer $\det(A)$:

$$\begin{aligned} |A| &= +0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2((2 \times 2) - (1 \times 3)) = 2. \end{aligned}$$

$|A| = 2 \neq 0$ D'où A est inversible et l'on sait que :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Com}(A))^T.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} (\text{Com}(A))^T.$$

– On calcul $\text{Com}(A)$:

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } (\text{Com}(A))^T = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 7 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 7 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & 2 & -1 \\ \frac{7}{2} & -3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$