Chapitre I

Les vecteurs

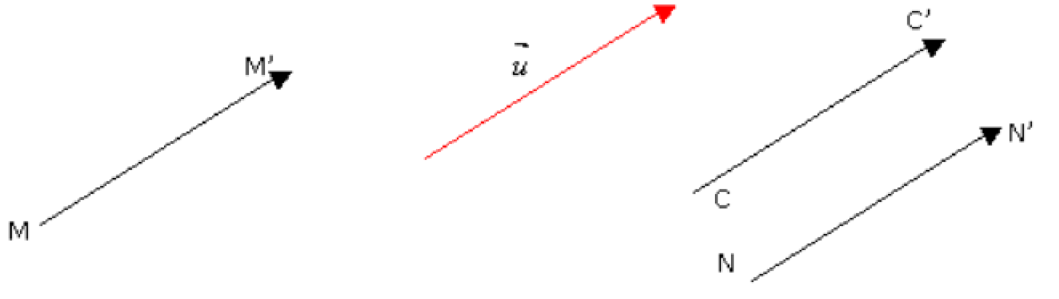
1 VECTEURS ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

1.1 Notation et représentation graphique

Soit un vecteur donné, caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur (non nulle). On choisit ce vecteur constant comme vecteur de translation t.

Tous les couples de points (M, M'), où M est un point quelconque du plan et M' son image par la translation sont appelés représentants du vecteur choisi.

On a donc $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$



Les couples (M, M'), (N, N') et (C, C') sont des représentants du vecteur. Celui-ci a une infinité de représentants.

Soit J un point fixé ; alors $\vec{u}$ n'admet qu'un seul représentant d'origine J.

1.2 Norme d'un vecteur

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'ensemble V des vecteurs du plan et (A, B) l'un de ses représentants. On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ la longueur AB que l'on note $||\vec{u}||$.

Dans l'exemple précédent, on a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$
Ces trois vecteurs on la même longueur. C'est cette longueur, indépendante du choix du représentant, que l'on désigne par norme de $\vec{u}$.

On a donc : $||\vec{u}|| = ||\overrightarrow{MM'}|| = ||\overrightarrow{NN'}||$
Ou $||\vec{u}||$ = MM' = NN'

Remarque : le vecteur nul n'a ni direction ni sens. Sa longueur est nulle.

Extension de la relation de Chasles. Pour tous points A, B et C du plan distincts ou non, on a égalité vectorielle : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

<u>Remarque</u> : le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est égal au vecteur nul noté $\vec{0}$.

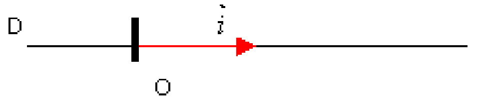
1.3 Vecteur unitaire

Définition : On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme égale à l'unité de longueur fixée dans le plan.

2 REPÈRE D'UNE DROITE

2.1 Repère d'une droite

Définition : Un repère d'une droite D est un couple (O, $\vec{i}$) où O est un point de D, appelé origine du repère, et $\vec{i}$ u vecteur non nul dont la direction est celle de D



Remarques : Une droite possède une infinité de repères. Si A et B sont deux points distincts d'une droite D, alors le couple (A, $\overrightarrow{AB}$) est un repère de la droite D, A en est l'origine.

Une droite, munie d'un repère, est appelée une droite graduée.

2.2 Abscisse d'un point

Définition : Soit une droite D de repère (O, $\vec{i}$). Soit I le point défini par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et M un point de D. On appelle abscisse du point M dans le repère (O, $\vec{i}$) le réel x
-positif ou nul, égal à OM / OI si M appartient à la demi-droite [OI),
-strictement négatif, égal à – OM / OI si M n'appartient pas à [OI).

Remarque : on note xm l' abscisse du point M dans un repère donné. Notons également que l'abscisse du point O est nulle.

2.3 Mesure algébrique

Définition : Soit A et B deux points d'une droite D, munie d'un repère, x_a l'abscisse de A et x_b l'abscisse de B dans ce repère. La mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à $x_b - x_a$.
On note $\overline{AC}$ $x_a - x_b$

Remarque : $\overline{AB}$ = AB si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a le même sens que $\vec{i}$

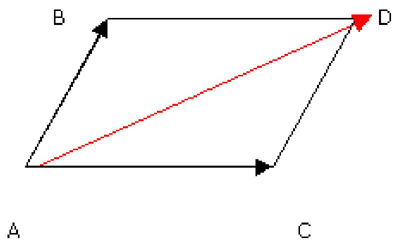
3 SOMME ET DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS

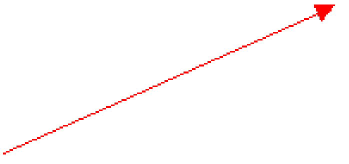
3.1 Somme de deux vecteurs

Soient $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs.

On appelle somme des deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ notée $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que ABCD soit un parallélogramme. Dans le cas où $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AC}$ est nul, alors on pose :

$\vec{0} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$





$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Définition : L'opération qui, à tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ associe le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est appelée addition vectorielle.

3.2 Différence de deux vecteurs

Opposé d'un vecteur :

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur représenté par le couple de points (A,B). L'opposé du vecteur par le couple (B, A)

$\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, est le vecteur représenté

Différence de deux vecteurs

Définition : Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On appelle différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pris dans cet ordre, la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $(-\vec{v})$. On la note $\vec{u} - \vec{v}$:

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

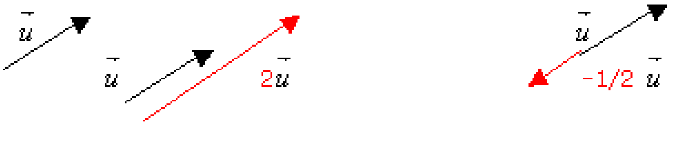
Propriétés essentielles :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

et : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

4 MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE RÉEL

Définition : L'opération qui, à tout couple $(x, \vec{u})$ où x est un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur, associe le vecteur $x\vec{u}$, est appelée multiplication d'un vecteur.



Remarque : $0.\ \vec{u} = \vec{0}$

4.1 Vecteurs colinéaires

Définition : Deux vecteurs sont colinéaires lorsque l 'un est le produit de l'autre par un nombre réel.

Théorème : Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

4.2 Vecteur directeur d'une droite

Définition Soient A et B deux points distincts d'une droite. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Théorème : Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Théorème : Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C sont alignée (attention : les deux vecteurs doivent avoir une extrémité en commun pour que ce théorème soit vrai)

4.3 Milieu d'un segment

Définition : I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

4.4 Centre de gravité d'un triangle

Théorème : Soient A, B et C trois points non alignés et G un point du plan.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
¤ G est le centre de gravité du triangle ABC
¤ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
¤ $\overrightarrow{AG}=(2/3)\overrightarrow{AA'}$, A' étant le milieu du segment [BC]

¤ M étant un point quelconque du plan, $\overrightarrow{MG}=(1/3)(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$

PRODUIT SCALAIRE ET PRODUIT VECTORIEL

1 DÉFINITION

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormale de l'espace.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}=x^*\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'^*\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ est le réel $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

2 PROPRIÉTÉS

Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel α,

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

3 ORTHOGONALITÉ

-Deux vecteurs : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

-Un point sur une droite : soit D un droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$, M et A des points de l'espace.
A est le projeté orthogonal de M sur D si et seulement si :
- A appartient à D
- $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$

Un point sur un plan : soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}$,. M et A des points de l'espace.
A est le projeté orthogonal de M sur P si et seulement si :
- A appartient à P
- $\vec{AM} = k \vec{n}$, où k est un réel.

Deux droites : soit D un droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$, et D' un droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{v}$. D et D' sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Une droite et un plan : soit D un droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$, et P un plan de l'espace de vecteur normal $\vec{v}$ .D est orthogonale à P si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, soit si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Deux plans : deux plans P et P' de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$.

4 DÉFINITION D'UN PLAN

Le plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M qui vérifient : $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Dans un repère orthonormal, un plan P a une équation de la forme : ax + by + cz +d = 0, où les réels a, b, c, ne sont pas tous nuls. Le vecteur $\vec{n}$ (a, b, c) est un vecteur normal du plan.

5 EQUATION D'UNE SPHÈRE

Soit S une sphère de centre I et de rayon r. Soit M un point de S.On déduit de l'égalité $IM^2 = r^2$ l'équation de la sphère.
Si on connaît les coordonnées des points A et B tels que [AB] est un diamètre, alors l'équivalence M∈ S⇔ $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ permet de donner une équation de S.

6 PRODUIT VECTORIEL

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, A, B, C trois points tels que : $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$.

$\vec{w}$, produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ vérifie :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\vec{w} = 0$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires :

- $\vec{w}$ est normal au plan (ABC)
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe
- $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| * ||\vec{v}|| * \sin \widehat{BAC}$

Le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, et pour tout réel k,

- $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$
- $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k * (\vec{u} \wedge \vec{v})$

$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$