STATIQUE (Suite)

6. Statique du solide

Tous les solides que nous étudierons dans ce chapitre sont considérés indéformables : la distance entre deux points du même solide reste constante quels que soit les systèmes de forces extérieures appliqués.

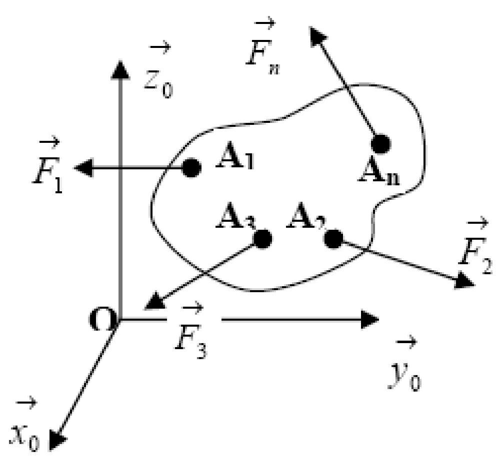
On considère un solide (S) quelconque soumis à des forces : $(\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \ldots, \vec{F_n})$ appliquées aux points : $(M_1, M_2, \ldots\ldots, M_n)$

6.1. Equilibre du solide

Pour que le solide soit en équilibre statique il faut et il suffit que :

- La résultante de toutes les forces extérieures appliquées au solide, soit nulle ;
- Le moment résultant de toutes ces forces en un point O, soit nul.

- $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$
- $\overrightarrow{M}_{/O} = \sum_i \overrightarrow{M(\vec{F}_i)}_{/O} = \vec{0}$



Un solide (S), soumis à des actions mécaniques extérieures est en équilibre statique si et seulement si le torseur représentant l'ensemble de ces actions est un torseur nul.

Ces deux équations vectorielles se traduisent par les six équations scalaires suivantes :

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{M}_{/O} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

Le système est complètement déterminé si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations indépendantes.

6.2. Equilibre d'un solide dans un plan

Dans le cas d'un solide soumis à des forces coplanaires, le système précédent se réduit à trois équations scalaires.

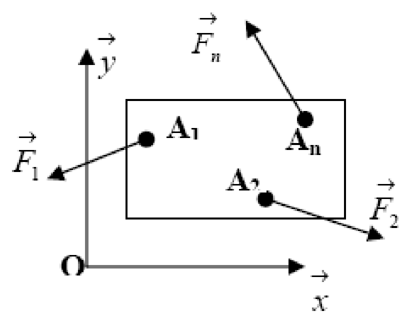
Soit (xoy) , le plan contenant les forces appliquées au solide, nous avons alors :

$$z = 0 \quad \text{et} \quad F_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_x = M_y = 0 \quad \text{et} \quad M_z = M_{/O}$$

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$R_x = \sum_i F_{ix} = 0 \quad ; \quad R_y = \sum_i F_{iy} = 0 \quad ; \quad M_{/O} = \sum_i M_{iz} = 0$$

$$\vec{F}_i = \begin{cases} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{cases} \; ; \; \vec{OA}_i = \begin{cases} x_i \\ y_i \\ 0 \end{cases}$$



$$\vec{M}_{i/O} = \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i = \begin{cases} x_i \\ y_i \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ x_i F_{iy} - y_i F_{ix} = M_{iz} \end{cases}$$

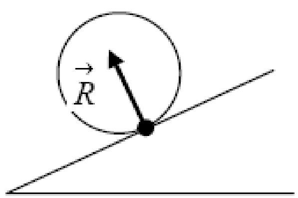
$$M_{/O} = \sum_i M_{i/O} = 0$$

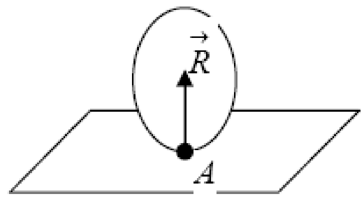
6.3. Réactions aux appuis et aux liaisons à deux dimensions

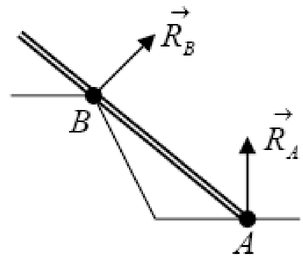
6.3.1. Appui simple d'un solide sur une surface parfaitement lisse

Les contacts entre les solides sont ponctuels.

Soit *(S)* un solide reposant sur une surface *(P)* , on dit que le point A du solide est un point d'appui s'il reste continuellement en contact de la surface *(P)*. Si le plan *(P)* est parfaitement lisse alors la force de liaison (la réaction $\vec{R}$) au point de contact est normale à ce plan.





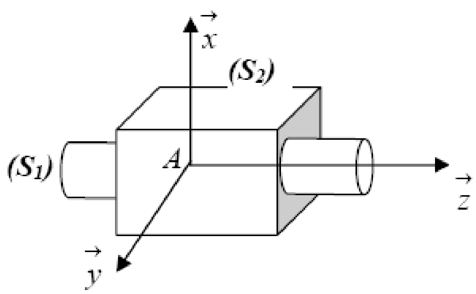


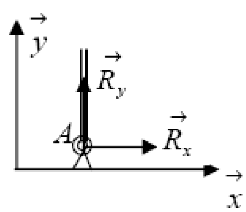
6.3.2. Articulation d'un solide

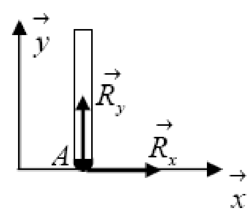
Un point A d'un solide est une articulation lorsqu'il reste en permanence en un point fixe de l'espace.

a) Liaison verrou (Articulation cylindrique)

Les solides sont en contact entre eux suivant une surface cylindrique. Le solide *(S_1)* a deux degrés de liberté par rapport au solide *(S_2)*: Une translation suivant l'axe *Az*, et une rotation autour du même axe.



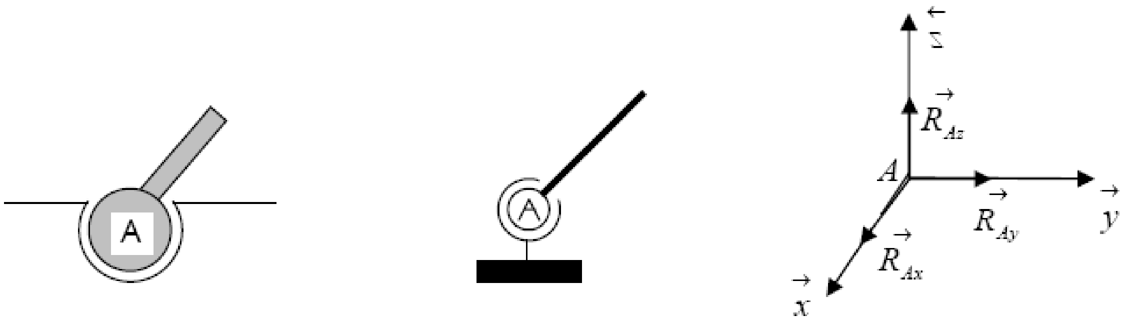




$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay}$ avec $\vec{R}_{Az} = \vec{0}$

La réaction suivant l'axe de l'articulation *(Az)* est nulle.

b) Liaison rotule (Articulation sphérique)



Liaison sphérique : 3 degrés de liberté (rotations)

La réaction au point A de l'articulation sphérique à trois composantes :

$\overrightarrow{R_A} = \overrightarrow{R_{AX}} + \overrightarrow{R_{Ay}} + \overrightarrow{R_{Az}}$

c) Encastrement d'un solide

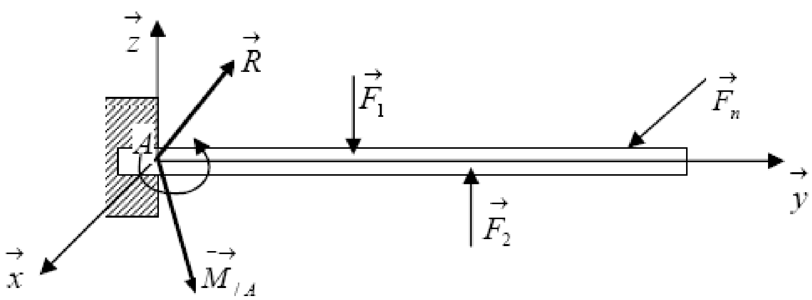
On dit qu'un solide est encastré lorsqu'il ne peut plus changer de position quels que soit les forces extérieures appliquées. Cette liaison est représentée par deux grandeurs :

$\vec{R}$: la résultante des forces extérieures appliquées au solide et actives au point A

$\overrightarrow{M_{/A}}$: le moment résultant des forces extérieures appliquées au solide par rapport au point A

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F_i}$$

$$\overrightarrow{M_{/A}} = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F_i}$$

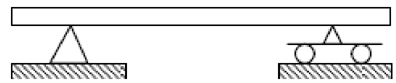


d) Combinaisons de liaisons

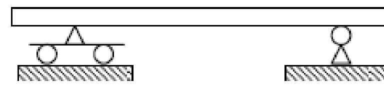
Avec ces différents types de liaisons (Appui simple, articulation cylindrique, articulation sphérique et encastrement) nous pouvons réaliser des combinaisons qui permettent de réaliser montages mécaniques statiquement déterminés.

Exemples:

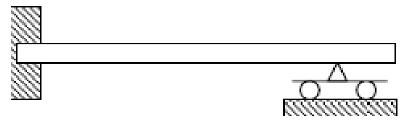
(1) Appui simple deux fois



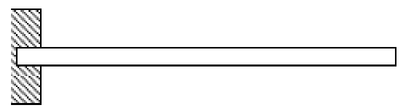
(2) Appui simple et une articulation



(4) Encastrement et appui simple



(3) Encastrement seul



Ces combinaisons sont dites isostatiques (statiquement déterminées) si le nombre d'inconnues est inférieures au nombre d'équations indépendantes qu'on peut établir. Certaines combinaisons ne sont pas autorisées et ne peuvent trouver la solution par la statique seule.

Exemples : 2 appuis articulés, une articulation et un encastrement, encastrement deux fois. Certaines combinaisons sont hyperstatiques, elles ne peuvent trouver solution par la statique.

Exemple : appui simple trois fois

Nous représentons dans le tableau ci dessous les différents types d'appuis et de liaisons et les composantes des réactions associées à celles-ci.

Type de liaisons	Composantes de la réaction
Appui simple rouleau ou Surface lisse sans frottement :	$\vec{R}$: la réaction est normale au point d'appui.
Appui simple avec frottements	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$: deux composantes dans le plan de contact
Articulation cylindrique d'axe *Oz*	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$ avec $\vec{R}_z = \vec{0}$; La composante suivant l'axe de l'articulation est nulle
Articulation sphérique	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$: trois composantes
Encastrement	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ et $\vec{M}_{/A}$ trois composantes plus le moment au point d'encastrement.