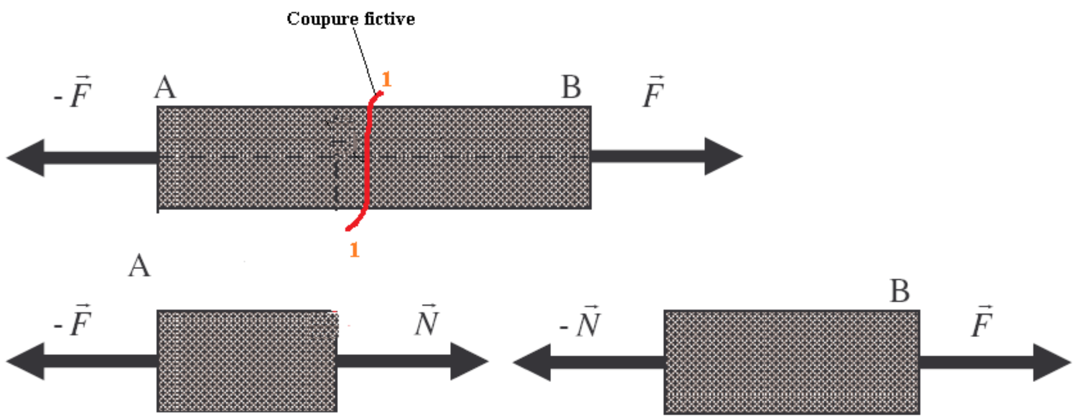
1. Les Efforts Normaux :

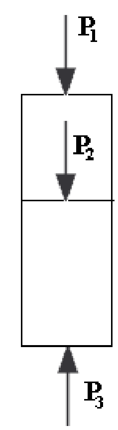
La résultante des forces normales dans une section transversales est appelée effort normal et il est déterminer par la méthode des sections fictives



Dans la barre soumise aux forces $\vec{F}$, pour définir l'effort dans la section 1-1, il est nécessaire de déterminer l'effet de la partie droite sur la partie gauche et vis versa, qui est noté N.

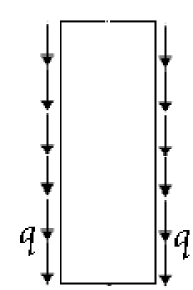
$$\sum F_{/X} = 0 \Longrightarrow F - N = 0 \Longrightarrow F = N$$

2. Les Types de Forces :



Il en existe de types :

Force concentrée : elle est appliquée en un point particulier d'un corps.



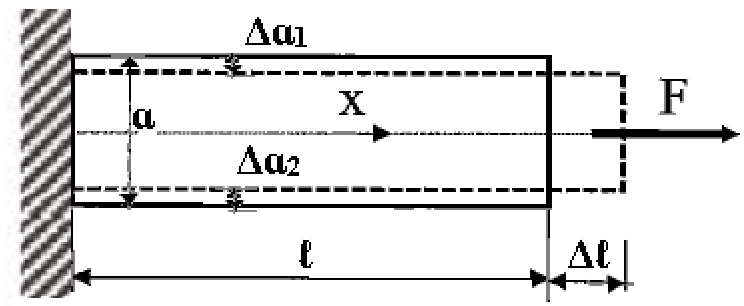
Force repartie : elle est appliquée sur tout le corps ou une surface ou une longueur (exp le poids).

3. Coefficient de Poisson

(Simon Deni Poisson (1781-1840)

Lors d'un essai de traction, une barre de longueur ℓ et de largeur α s'allonge d'une valeut $\Delta\ell$ et ses dimensions transversales diminuent de $\Delta\alpha$

$\Delta\alpha = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2$



La déformation latérale de la barre est donnée par :

$\varepsilon_\alpha = \Delta\alpha / \alpha$

La déformation longitudinale de la barre est donnée par : $\varepsilon_\ell = \Delta\ell / \ell$

Le rapport entre les déformations transversales et longitudinales défini le coefficient de Poisson μ

$$\mu = -\frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\ell} = -\frac{\Delta\alpha/\alpha}{\Delta\ell/\ell}$$, le signe (-) pour que $\mu > 0$

Pour tous les matériaux $0 \le \mu \le 0{,}5$, (l'acier $\mu = 0{,}3$)

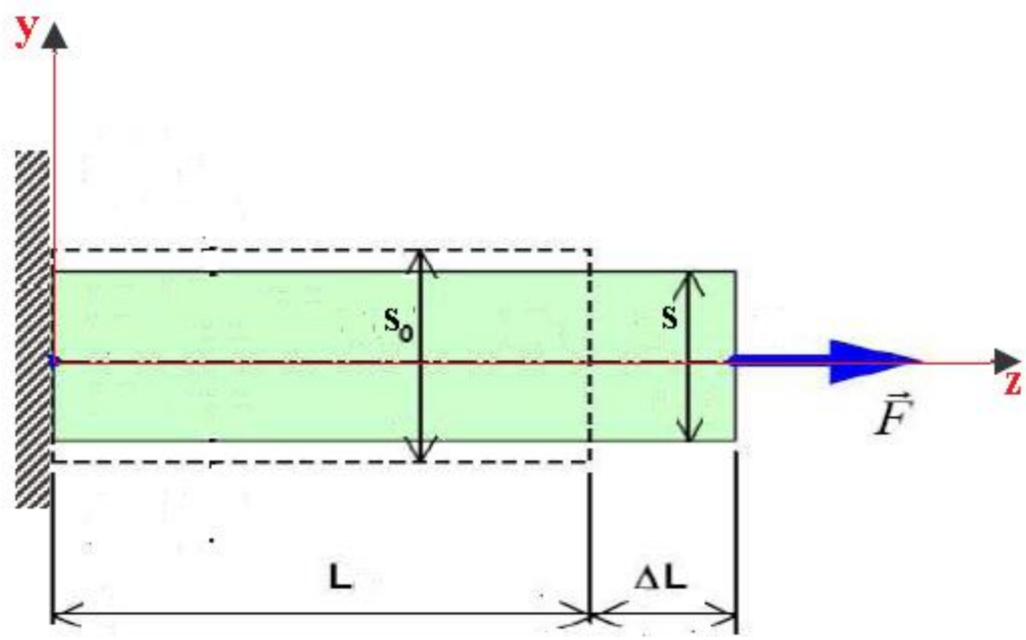
4. Loi de Hooke

Considérons une poutre homogène de longueur ℓ et de section transversale uniforme s soumise a une force axiale concentrique F, la déformation relative dans cette poutre en un point arbitraire x est donnée par : $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$;

E représente le module d'élasticité du matériau constituant la barre appelé également module de **young**

5. Allongement Absolu :

Les expériences ont montrées que la longueur de la barre augmente lors d'un essai de traction est une diminution des dimensions latérales. L'inverse se produit lors d'un essai de compression.



L'effort par unité de surface de la barre représente la contrainte σ est donnée par :

$$\sigma = \frac{N}{s} = E\varepsilon$$

si N, s sont des constantes : $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \Longrightarrow \frac{N}{s} = E\frac{\Delta L}{L} \Longrightarrow \Delta L = \frac{NL}{sE}$

si N, s sont des variables : $\Delta(dz) = \frac{Ndz}{sE} \Longrightarrow \Delta L = \int_L \frac{Ndz}{sE}$

ou dz représente une partie infinitésimale de la surface de la barre.

E représente le module d'élasticité du matériau constituant la barre

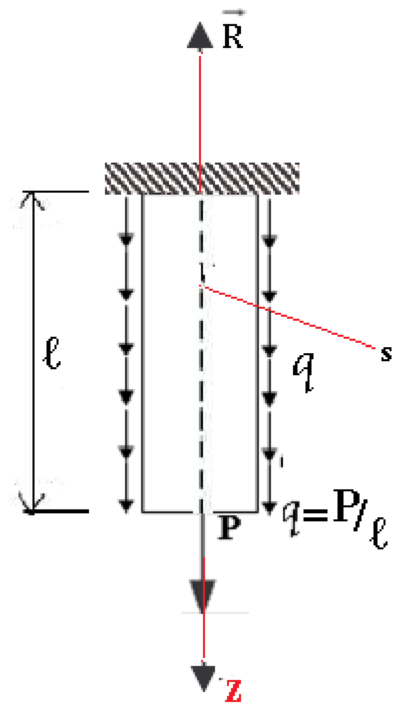
Soit une barre composée par parties avec : $s_1 \rightarrow L_1$, $s_2 \rightarrow L_2, \ldots\ldots\ldots, s_n \rightarrow L_n$ et soumise a une traction N : $N_1, N_2, \ldots\ldots., N_n$ dans l'ordre.

L'allongement absolu est donner par : $\Delta L = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{E s_i}$

Le déplacement des sections $\delta(z)$ en fonction $(N(z), s(z))$: $\delta(z) = \int \frac{N(z)dz}{E\, s(z)}$

Exemple :

Soit la poutre illustrée ci-contre ;



q varie linéairement.

Tracer les diagrammes $N(z)$, $\sigma(z)$, $\delta(z)$.

Solution :

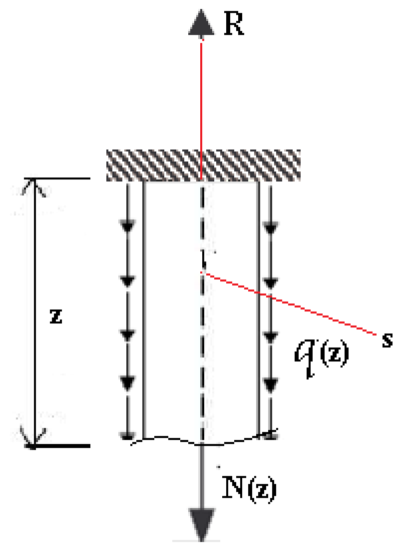
Calculons la réaction de l'encastrement :

$\Sigma F_{/z} = 0 \Longrightarrow R = P + \int_0^{\ell} q(z)dz$

q varie linéairement, donc $q(z) = a.z + b$ avec $\begin{cases} q(0) = a.0 + b = 0 \\ q(\ell) = a.\ell + b = P/\ell \end{cases}$

d'où : $q(z) = \frac{P}{\ell^2}.z.$, $R = P + \int_0^{\ell} \frac{P}{\ell^2}.z.dz \Longrightarrow R = \frac{3}{2}.P$

Puisque le système est en équilibre statique, on utilise la méthode des sections fictives pour déterminer l'effort interne.



Pour $0 \leq z \leq \ell$

$$\Sigma F_{/z}=0 \Longrightarrow N(z)-R+\int_0^z q(z)dz=0$$

$$N(z)=R-\int_0^z q(z)dz \qquad , \; q(z)=\frac{P}{\ell^2}.z$$

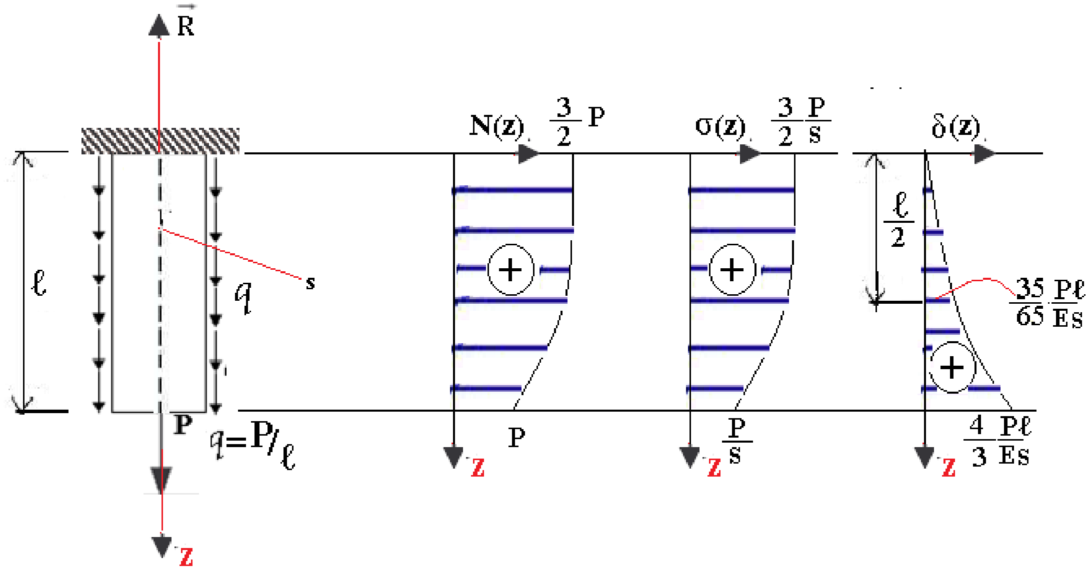
$$N(z)=\frac{3}{2}.P-\frac{Pz^2}{2\ell^2}. \quad , \; N(0)=\frac{3}{2}.P, \; N(\ell)=.P$$

La contrainte $\sigma(z)=\frac{N}{s}=\frac{1}{s}\left(\frac{3}{2}.P-\frac{Pz^2}{2\ell^2}.\right)$

Le déplacement des sections $\delta(z)$

$$\delta(z)=\int_0^z \frac{N(z)}{Es}dz=\frac{1}{Es}\int_0^z\left(\frac{3}{2}.P-\frac{P}{2\ell^2}.z^2\right)dz=\frac{1}{Es}\left(\frac{3}{2}.P\,z-\frac{P}{6\ell^2}z^3\right)$$

$$\Delta\ell_T=\delta(\ell)=\frac{1}{Es}\left(\frac{3}{2}.P\,\ell-\frac{P}{6\ell^2}\ell^3\right)=\frac{4}{3}\frac{P\ell}{Es}$$



6. Contraintes Admissibles

Les charges réelles appliquées aux constructions et aux éléments ainsi que les caractéristiques des matériaux les constituants varient légèrement des valeurs prises dans les calculs. Parmi les facteurs influant sur la solidité du matériau, on cite l'hétérogénéité du matériau et les surcharges qui peuvent être négligées.

Pour que les constructions et leurs éléments constituants soient de solidité adéquate aux conditions d'utilisation, il faut que les contraintes résultantes dans les constructions et leurs éléments constituants soient inferieurs des valeurs limites capables de les détruire ou de causé des déformations plastiques.

Ces valeurs limites doivent être égales aux contraintes admissibles données par :

$$[\sigma],\ \sigma_{ad} = \frac{\sigma_u}{\eta_{ad}}$$

Ou : σ_u est la contrainte limite ultime du matériau, σ_u varie selon la nature du matériau et son comportement.

$[\sigma]$, σ_{ad} est la contrainte limite admissible du matériau.

η_{ad} est un coefficient de sécurité.

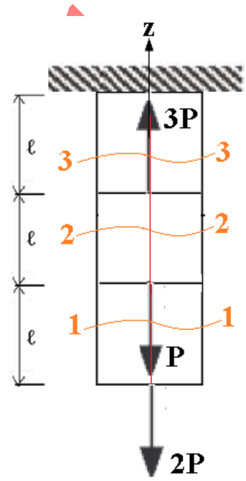
Dans les calculs, il faut vérifier que la contrainte maximale résultante soit inferieure ou égale a la contrainte admissible.

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \text{ , } \sigma_{ad}$$

Exemple :

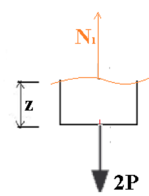
Déterminer la valeur maximale de P que peut supporter le poteau, sachant que

$[\sigma]$= 16000 N/cm², s = 10 cm²

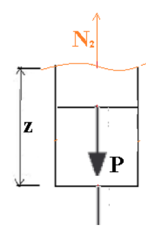


Solution :

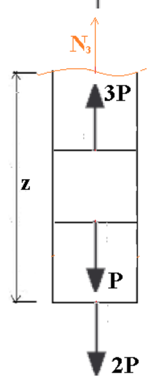
Pour $0 \leq z \leq \ell$ $\Sigma F_{/z}=0 \Rightarrow N_1 - 2P=0 \Rightarrow N_1= 2P$



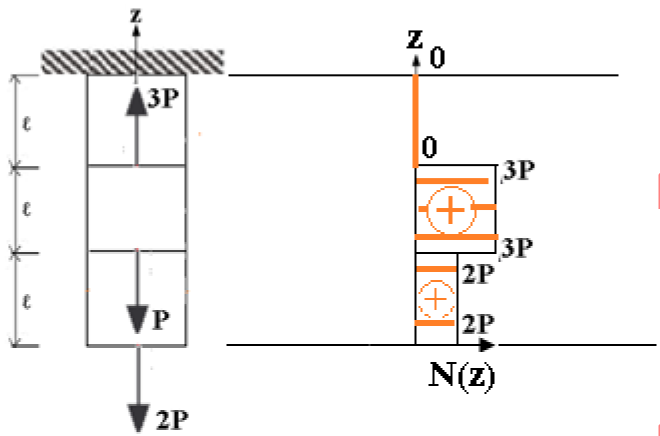
Pour $\ell < z \leq 2\ell$ $\Sigma F_{/z}=0 \Rightarrow N_2\text{-}P\ \text{-}2P=0 \Rightarrow N_2= 3P$



Pour $2\ell < z \leq 3\ell$ $\Sigma F_{/z}=0 \Rightarrow N_3\text{-}P\ \text{-}2P + 3P=0 \Rightarrow N_3= 0$



Le diagramme de l'effort normal est donné par :



D'où :

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{N_{max}}{s} \leq [\sigma] \Rightarrow N_{max} \leq s.[\sigma] \Rightarrow 3P \leq s.[\sigma] \Rightarrow P \leq \frac{s.[\sigma]}{3} = \frac{16000.10}{3}$$

donc $\boxed{P \leq 53333{,}33\ N}$