Systèmes triangulés ou en treillis

A l'aube de révolution industrielle, les usines et les halls industriels, les ponts et les ouvrages d'art nécessités de plus en plus d'envergure entre les appuis. Les systèmes en treillis offraient cet avantage puisque une des caractéristiques fondamentales de ces systèmes c'est qu'ils présentent une rigidité importante suivant leurs plans sans être pénalisés en terme de poids propre.

1. Définition:

On appelle treillis un assemblage de poutres reliées entre elles par des articulations parfaites: les nœuds du treillis.

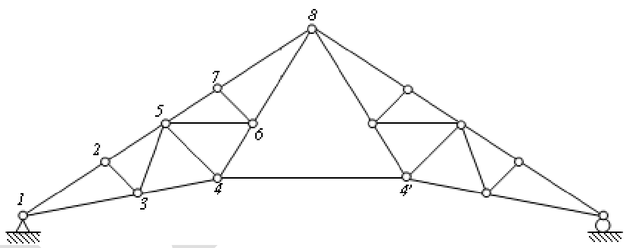
On supposera que le chargement, sous forme de forces ponctuelles, est appliqué aux nœuds du treillis. Dans ces conditions, chaque poutre n'est soumise qu'à l'effort normal et on les appelle alors des barres. Il y a transmission des efforts dans le sens des barres uniquement.

L'étude d'un système triangulé revient :

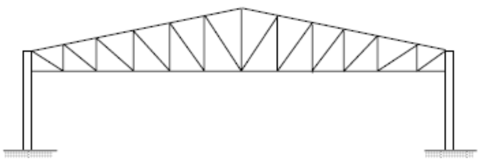
– à la détermination des efforts normaux dans chacune des barres ;

– au calcul des déplacements des nœuds.

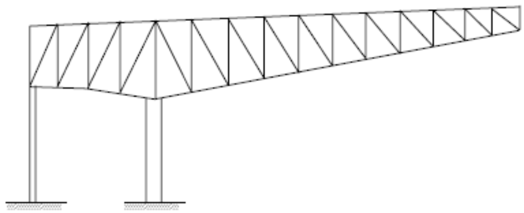
Exemple de système en treillis,



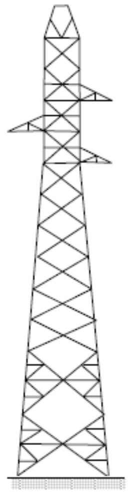
Ferme type Polonceau



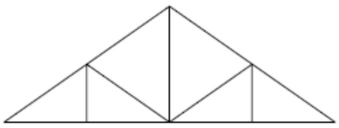
ferme d'une toiture



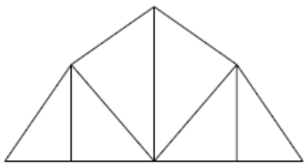
système en porte à faux



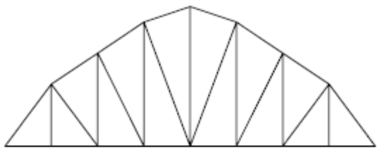
Pylône



triangulaire

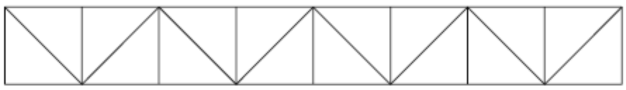


Polygonale

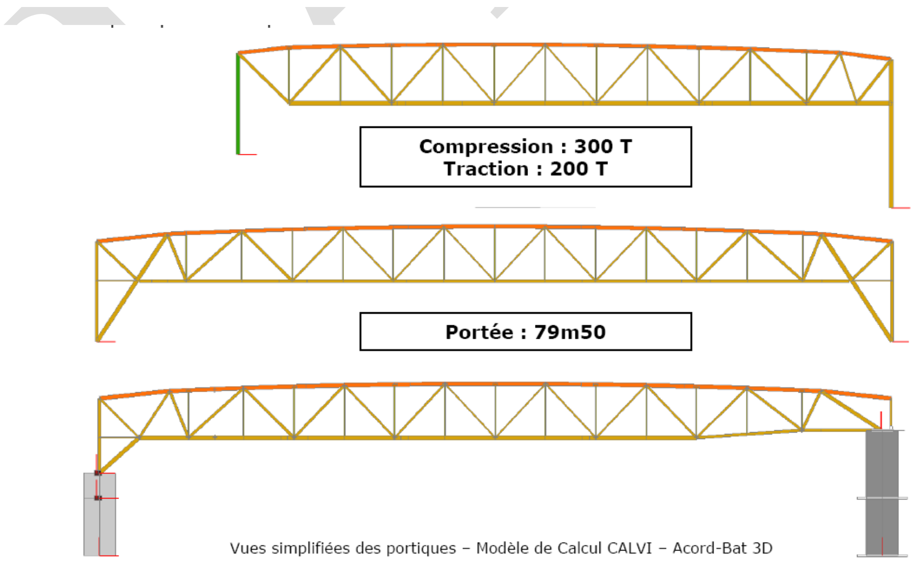


curviligne

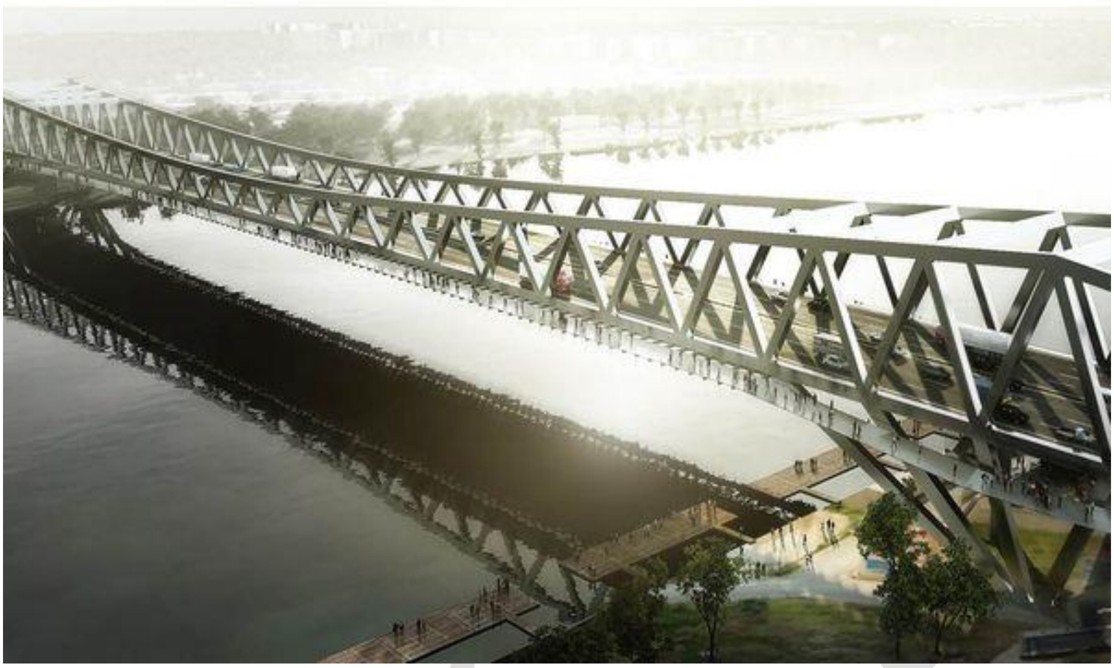
Fermes



Poutre en treillis



80m de portée en treillis bois pour le stade d'Athlétisme de Miramas (France)|



La portée du pont, est de 480 mètres de pile à pile, à Ningbo (Chine)

2. Degré d'Hyperstaticité des structures planes articulées ou treillis

Pour les treillis, le degré d'hyperstaticité est donné par :

$$k = b + r - 2\,n'$$

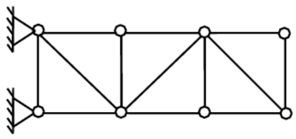
Où :

b : le nombre de barres ;

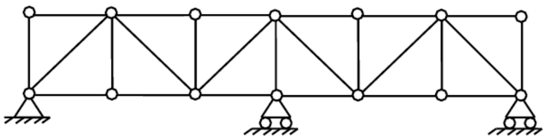
r : le nombre de réactions ;

n' : le nombre de nœuds.

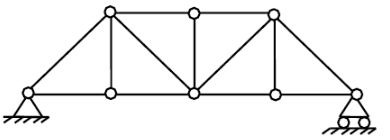
Exemples :



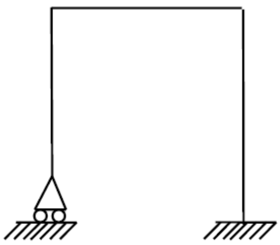
Structure articulée 1 : k =4+13-2*8=1

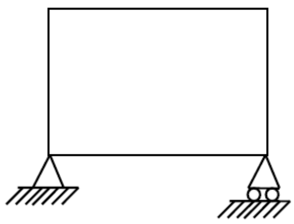


Structure articulée 2 : k =4+25-2*14=1

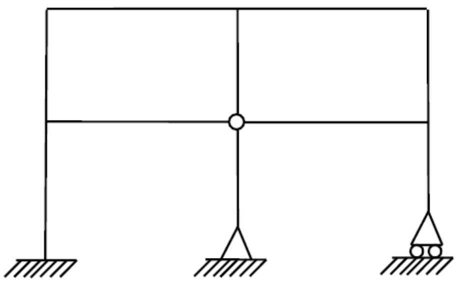


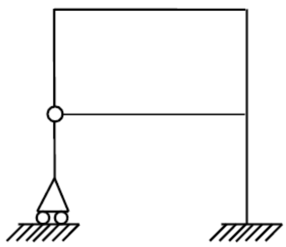
Structure articulée 3 : k = 3+13-2*8=0





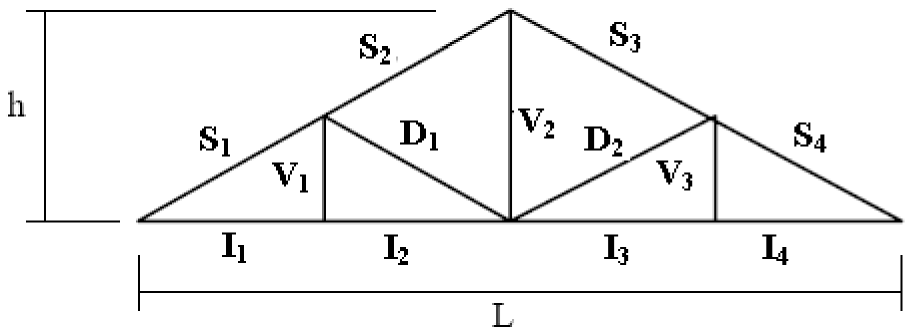
Structure 1 : k = (4+3*0)-(3+0)=1 **Structure 2 :** k = (3+3*1)-(3+0)=3





Structure 3 : k = (6+2*3)-(3+1)=8 **Structure 4 :** k = (4+1*3)-(3+1)=3

On appelle les éléments (extérieurs) d'un système en treillis les membres et la forme intérieur le réseau.



S_i: membrane supérieure

I_i: membrane inférieure

V_i: barre verticale

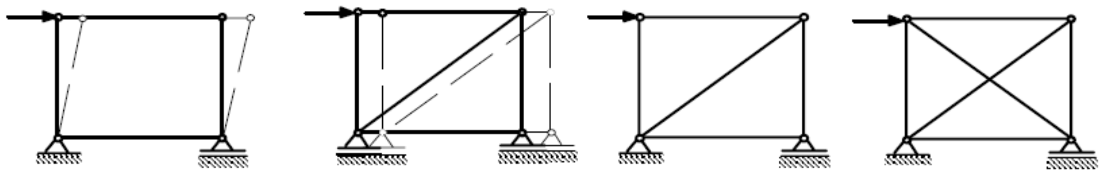
D_i: barre diagonale

Un système en treillis est appelé ferme si $\frac{h}{L}$ = 0.1 à 0.5 et la forme soit triangulaire, polygonale ou curviligne. Par contre si $\frac{h}{L} < 0.1$ le système est dit poutre à treillis, en général ses membrures sont parallèles.

On distingue les systèmes de barres spatiaux et plans. Dans ce chapitre nous étudierons des systèmes en treillis plans: Les nœuds et les forces extérieures sont contenus dans un même plan.

3. Etude Cinématique Des Systèmes En Treillis

Les systèmes de barres se subdivisent en formes géométriquement déformables et indéformables; ces derniers en isostatiques et hyperstatiques. Le système est dit géométriquement indéformable s'il ne change pas de forme et de position sous l'action des charges (Fig.c,d). Dans le cas contraire le système est dit géométriquement déformable ou mécanisme (Fig.a,b).



(a) (b) (c) (d)

Le système indéformable est isostatique si les réactions d'appuis se déterminent à l'aide des seules conditions d'équilibre. Dans le cas contraire le système est dit hyperstatique. Pour déterminer la catégorie du système, on utilise l'étude cinématique qui peut être exprimée par la formule suivante:

$$L = 3b - 3Ʀ - 2\alpha - \ell$$

L: le degré de stabilité du système.

b: le nombre de barres.

Ʀ: le nombre de nœuds rigides simples (assemblant 2 barres)

α: le nombre d'articulations simples (assemblant 2 barres). Pour chaque nœud, α est égal au nombre d'extrémités de barres concourant au nœud -1 (moins un)

ℓ: le nombre de réactions d'appuis simples.

Si $L > 0$ le système est géométriquement déformable

Si $L = 0$ le système est isostatique

Si $L < 0$ le système est hyperstatique, et le degré d'hyperstaticité $k = -L$

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante pour avoir un système indéformable et isostatique, car elle donne uniquement le nombre nécessaire des liaisons pour former un système isostatique. Il faut donc toujours vérifier l'indéformabilité du système par une étude géométrique.

4. Etude des Systèmes en Treillis

Les réactions d'appuis sont déterminées à partir des équations de la statique.

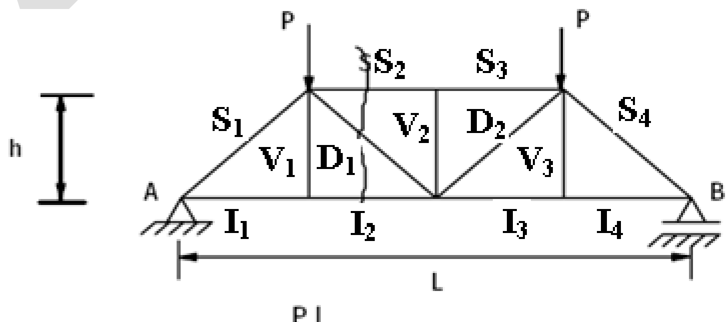
Les efforts dans les barres cependant, sont déterminés par l'une des méthodes suivantes:

Méthode des sections (Gullmann)

Elle consiste à couper le système en deux parties, et considérer les équations d'équilibre de la statique de l'une des deux parties. La section devrait être choisie pour qu'il y ait au maximum trois efforts inconnus.

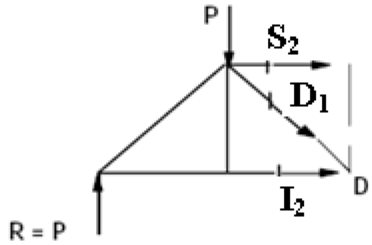
Exemple

Déterminer les efforts dans les barres S_2, D_1 et I_2 du système de la Figure ci-contre



Solution

On montre que le système est isostatique et indéformable. On sectionne le système au



niveau des barres où on veut déterminer les efforts. On établit ensuite l'équilibre de la partie gauche avec les trois inconnues S_2, D_1 et I_2.

$$\sum M_{/D}=0 \Rightarrow h \times S_2 + \frac{PL}{2} - \frac{PL}{4} = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{PL}{4h}$$

$$\sum F_V=0 \Rightarrow P - P - D_1 \sin\alpha = 0 \Rightarrow D_1 = 0$$

$$\sum F_H=0 \Rightarrow S_2 + I_2 + D_1 \cos\alpha = 0 \Rightarrow I_2 = - S_2 = \frac{PL}{4h}$$

Méthode des nœuds

On établit l'équilibre des nœuds après avoir remplacé chaque barre concourant au nœud par l'effort correspondant. On détermine ainsi les efforts inconnus qui ne devraient pas être plus de deux par nœud.

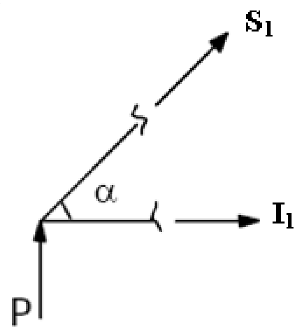
Exemple

Considérons le nœud A du système de la figure précédente.

Les équations d'équilibre du nœud s'écrivent:

$$\sum F_V=0 \Rightarrow P + S_1 \sin\alpha = 0 \Rightarrow S_1 = -\frac{P}{\sin\alpha}$$

$$\sum F_H=0 \Rightarrow I_1 + S_1 \cos\alpha = 0 \Rightarrow I_1 = - S_1 \cos\alpha = P\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

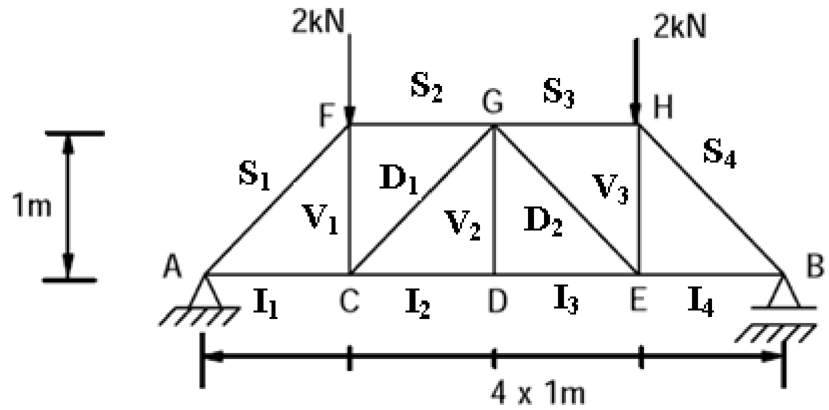


Remarque:

On peut combiner la méthode des sections avec celle des nœuds lors de la résolution d'un système en treillis. Si nous devons déterminer les efforts dans toutes les barres du système, il convient d'utiliser la méthode des nœuds. Si par contre il est nécessaire de déterminer quelques efforts, il est préférable d'utiliser la méthode des sections.

Application

Déterminer les efforts du système représenté sur la figure ci-contre

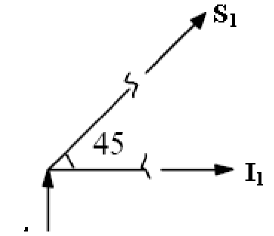


1 Etude cinématique

L=3×13 - 2×18 - 3 = 0 donc le système est isostatique.

2 Détermination des efforts

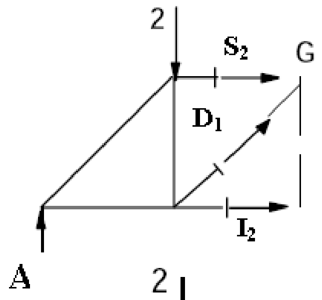
Equilibre du nœud A :



$2 + S_1 \sin 45 = 0 \Rightarrow S_1 = -\frac{2}{\sqrt{2}} \times 2 = -2\sqrt{2} = -2{,}8284$ KN

$I_1 + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow I_1 = -S_1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$ KN

Section 1.1 :

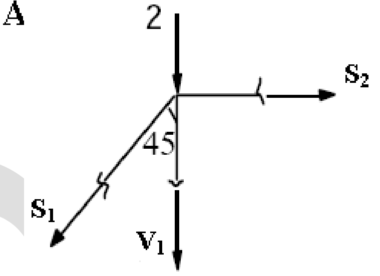


$\sum M_{/G} = 0 \Rightarrow 2 \times 1 - 2 \times 2 + 1 \times I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = 2$ KN

$\sum F_V = 0 \Rightarrow 2 - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = 0$

$\sum F_H = 0 \Rightarrow S_2 + I_2 = 0 \Rightarrow -I_2 = S_2 = -2$ KN

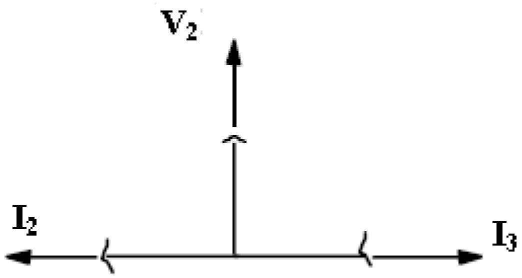
Equilibre du nœud F :



$\sum F_V = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 + V_1 + 2 = 0 \Rightarrow V_1 = 0$

$\sum F_H = 0 \Rightarrow S_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 = 0 \Rightarrow -2 + 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Equilibre du nœud D :



$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_2 = 0$

$\sum F_H = 0 \Rightarrow I_3 = I_2 = -2$ KN

Par symétrie, on trouve:

$S_3 = S_2 = 0$

$D_2 = D_1 = 0$

$S_4 = S_1 = -2\sqrt{2} = -2{,}8284$ KN

$V_3 = V_1 = 2$ KN

$I_4 = I_1 = -2$ KN