II. Equations générales de la mécanique des fluides

Introduction

Les principales lois de l'écoulement et les concepts fondamentaux découlent de la combinaison de l'équation de Darcy qui est le fondement de toutes les théories d'écoulement, de l'équation de la continuité (conservation de la masse) et de l'équation d'état.

Pour une description complète du mouvement d'un fluide, on doit tenir compte de trois aspects :

a- Les conditions que le milieu impose au mouvement du fluide ;
b- Les propriétés du fluide et ;
c- La conservation de la masse.

La loi de Darcy décrit l'aspect dynamique de l'écoulement en fonction du milieu et remplit ainsi la condition (a) ; pour compléter la description, il reste à considérer les conditions (b) et (c) c'est à dire : l'état (propriété) du fluide et la conservation de la masse. (Les références classiques dans ce domaine sont celles de Bear (1972), de Marsily (1994) et de Domenico et Schwartz (1997) ; In : Suski B., 2006).

Ces équations peuvent exprimer mathématiquement le phénomène étudié de l'écoulement dans le sol.

II.1. Equation de mouvement

Cette équation est prise de la loi de Darcy pour un écoulement laminaire où les forces d'inertie sont négligeables.

$$\boxed{\vec{U} = -\frac{\overline{\overline{k}}\rho g}{\mu}\overrightarrow{\text{grad}}\ h = -\overline{\overline{K}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\ h} \qquad \text{(II.1)}$$

$$\boxed{h = \frac{p}{\rho g} + z}$$

h ; charge ou hauteur piézométrique

II.2. Equation d'état

Les équations d'état caractérisent le comportement du milieu et du liquide dans les conditions de filtration (écoulement dans la roche). Elles lient la <u>déformation</u> de la couche aux <u>variations de pression</u> de la roche et de l'eau.

Ces conditions se rencontrent dans <u>les roches profondes</u> où, les variations de la <u>viscosité</u>, de la <u>densité</u> et de la <u>compressibilité</u> de l'eau sont fonction de la pression et de la température.

Dans leur forme générale, les équations d'état de l'eau et du milieu poreux s'expriment de la façon suivante :

$\rho / \mu = f(P, t°)$: pour le liquide et,

$n_a = f(P)$: pour le milieu poreux

Avec : ρ ; masse volumique de l'eau, μ ; viscosité dynamique de l'eau, P ; pression exercée sur le milieu, t° ; température du milieu et, n_a ; porosité efficace du milieu.

- Pour le liquide, l'équation de compressibilité isotherme :

$$\boxed{\rho = \rho_o e^{\beta_l (p - p_o)}} \qquad \text{(II.2)}$$

Soit encore :

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} = \beta dp} \qquad \text{(II.3)}$$

- Pour le solide, on définit le coefficient de compressibilité des grains par la relation :

$$\boxed{\frac{dV_S}{V_S} = -\frac{d\rho_S}{\rho_S} = -\beta_S dp} \qquad \text{(II.4)}$$

Ou encore: $\boldsymbol{\beta = n_a / dp,}$ (n_a : porosité %)

II.3. Equation de continuité

L'équation de la continuité permet d'évaluer les potentiels. Elle exprime que le fluide est continu, donc la masse se conserve au cours de l'écoulement. La figure II.1, permet de définir le bilan sur un élément de référence infinitésimal.

- Hypothèses de base : Condition de continuité

L'étude de l'écoulement de I' eau dans les sols repose sur les trois hypothèses suivantes :

a- Le sol est saturé ;
b- L'eau et les grains sont incompressibles ;
c- La phase liquide est continue.

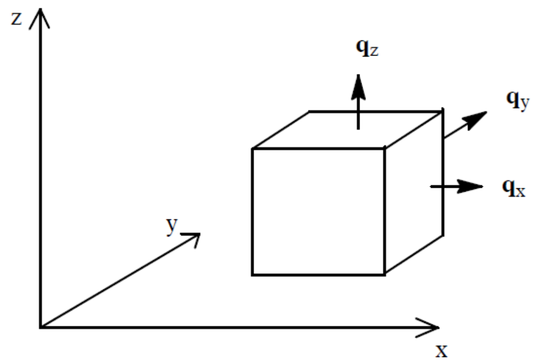

Fig. II.1 : Bilan des flux d'eau au travers d'un élément infinitésimal

Compte tenu que le milieu est saturé et que le fluide (l'eau) est incompressible, la somme des débits entrants et sortants de cet élément est nulle.

$$Qx +\_Qy +\_Qz = 0 \qquad \text{(II.5)}$$

Le débit est le produit du flux (q) par la section d'écoulement (A) :

$$Qx = qx. A$$

La variation de débit selon l'axe x est :

$$\Delta Q_x = \left[\frac{d}{dx}(q_x)\right] \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \qquad \text{(II.6)}$$

La loi de Darcy permet d'estimer le flux (qx) :

$$q_x = -K_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{II.7}$$

En introduisant l'équation de Darcy (II.7) dans l'équation (II.6), cette équation peut s'écrire :

$$\Delta Q_x = \left[\frac{d}{dx}\left(-K_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right]\Delta x\, \Delta y\, \Delta z = \left[-K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right]\Delta x\, \Delta y\, \Delta z \tag{II.8}$$

Les variations de débit selon les axes "*y*" et "*z*" sont dérivées de la même façon et s'écrivent :

$$\Delta Q_y = \left[\frac{d}{dy}\left(-K_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right]\Delta x\, \Delta y\, \Delta z = \left[-K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right]\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

$$\Delta Q_z = \left[\frac{d}{dz}\left(-K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right]\Delta x\, \Delta y\, \Delta z = \left[-K_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right]\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

En utilisant les différentes expressions de la variation des débits, l'équation de la continuité s'écrit :

$$\boxed{K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0} \tag{II.9}$$

Si le sol est isotrope, ($Kx = Ky = Kz$), l'équation de la continuité devient l'équation de **Laplace,** (Mermoud A., 2006**)** :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0} \quad \text{Ou bien} \quad \boxed{\nabla^2 h = 0} \tag{II.10}$$

II.4. Equation de diffusivité

L'équation Les trois équations qui régissent la circulation d'un fluide dans un volume élémentaire de milieu poreux sont :

– l'équation de continuité de la phase fluide considérée (l'eau) ;
– la loi empirique de Darcy ;
– et l'équation d'état isotherme du fluide.

En combinant ces trois lois, on obtient une équation dont l'intégration permettra de calculer l'évolution de la pression ou de la charge du fluide dans le milieu poreux. Pour établir cette équation que l'on appelle l'équation de diffusivité, trois hypothèses principales sont à envisager :

– l'eau et le milieu poreux sont incompressibles, cas d'une nappe libre ;
– eau incompressible et milieu poreux compressible, cas de la consolidation ;
– l'eau et le milieu poreux sont compressibles, cas d'une nappe captive.

L'équation de diffusivité décrit les transferts d'eau dans un milieu poreux saturé.

II.4.1. Equation de diffusivité en nappe libre

Une nappe libre est un milieu qui n'est saturé que sur une certaine hauteur et est surmonté de milieu poreux sec et non saturé. Elle surmonte généralement un substratum imperméable. On peut dans ce cas, négliger la compressibilté de l'eau (β_e constant) ainsi que celle du milieu poreux (w constant) ; toute variation de charge va entrainer un mouvement de la surface libre qui, en saturant ou en désaturant lemilieu poreux, va stocker ou destocker de l'eau : dans l'équation de continuité, il faut considérer un volume élémentaire qui comprenne un morceau de surface libre variable.

On prendra pour cela un prisme transversal à la nappe d'épaisseur « e » entre substratum imperméable et surface libre. Il faut supposer aussi, que dans la nappe libre, toutes les vitesses sont horizontales et parallèles sur une même verticale. Cette hypothèse, connue sous le nom d'hypothèse de Dupuit, est assez bien satisfaite dans la réalité dès que l'on s'éloigne des exutoires. Donc l'équation de diffusivité s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\right)=\omega_d\frac{\partial h}{\partial t}+Q} \qquad (II.11)$$

Si, la transmissivité est constante dans toute la nappe alors :

$$\boxed{\nabla^2 h=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=\frac{\omega_d}{T}\,\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{Q}{T}} \qquad (II.12)$$

Equation aux dérivées partielles, linéaire de second degré de type parabolique, analogue à l'équation de la chaleur, ∇^2 est l'opérateur Laplacien, défini ci-dessus à deux dimensions.

II.4.2. Equation de diffusivité en nappe captive

Nous supposons le milieu poreux entièrement saturé en fluide, car l'équation complète où les trois compressibilité (fluide, grains et sol) interviennent n'a de sens qu'en nappe captive profonde (couche aquifère confinée entre deux imperméable :

$$\boxed{\nabla^2 h=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=\frac{S}{T}\,\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{Q}{T}} \qquad (II.13)$$

Le rapport T/S est appelé diffusivité de l'aquifère. Ces équations sont identiques à celles de la nappe libre, mais S emplace ici la porosté w_d. Il faut bien voir cependant, que même si les deux équations nappe libre-nappe captive sont identiques, les mécanismes mis en jeux (mouvement de la surface libre dans un cas, compressibilté de l'eau, des grains et du sol dans l'autre) sont distincts.

II.4.3. Solutions de l'équation de diffusivité lors de pompage dans un puits

Lors d'un pompage en nappe captive, on considère généralement un écoulement radial vers le puits. On utilise alors cette équation en coordonnées polaires, où r (m) est la distance entre le point considéré et le centre du puits de pompage :

En coordonnées radiales l'équation de diffusivité s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}} \qquad (II.14)$$

Conclusion

Les principales lois de l'écoulement et les concepts fondamentaux découlent de la combinaison de l'équation de Darcy qui est le fondement de toutes les théories d'écoulement, de l'équation de la continuité (conservation de la masse) et de l'équation d'état.