« Trigonométrie »

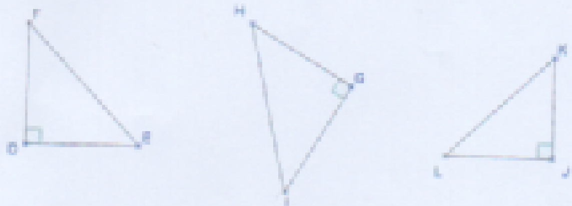
I. Rappels

1/ Vocabulaire

- Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.
- L'hypoténuse est le côté situé en face de l'angle droit : $[BC]$.
- Les autres côtés sont appelés les côtés de l'angle droit.

- Par rapport à l'angle $\widehat{CBA}$: $[AB]$ est le côté adjacent et $[CA]$ est le côté opposé.
- Par rapport à l'angle $\widehat{ACB}$: $[CA]$ est le côté adjacent et $[AB]$ est le côté opposé.

Exemple



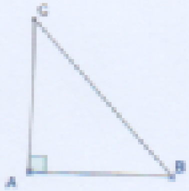
- Dans le triangle HGI, le côté adjacent à $\widehat{HIG}$ est $[IG]$

Triangle	Nom de l'angle	Côté adjacent	Côté opposé
EFD	$\widehat{FED}$	$[DE]$	$[DF]$
	$\widehat{DFE}$	$[DF]$	$[DE]$
HIG	$\widehat{HIG}$	$[IG]$	$[GH]$
	$\widehat{IHG}$	$[GH]$	$[IG]$
LKJ	$\widehat{JKL}$	$[KJ]$	$[JL]$
	$\widehat{JLK}$	$[JL]$	$[KJ]$

2/ Propriétés

Théorème de Pythagore

Dans un triangle ABC rectangle en A, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit : $BC^2 = AB^2 + AC^2$



Propriété sur l'hypoténuse

Dans un triangle, l'hypoténuse est le côté le plus long : $BC > AC$ et $BC > BA$.

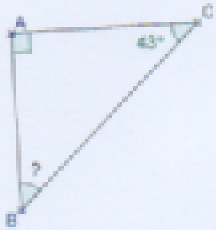
Propriétés sur les angles

- **Dans un triangle rectangle, la somme des deux angles aigus est égale à 90° : on dit qu'ils sont complémentaires.**
- **Dans un triangle quelconque, la somme des trois angles est égale à 180°.**

Un exemple

- **Puisque le triangle ABC est rectangle en A, les deux angles aigus sont complémentaires, donc :**

$\widehat{ABC} = 90 - \widehat{ACB}$
$\widehat{ABC} = 90 - 43$
$\widehat{ABC} = 47°$

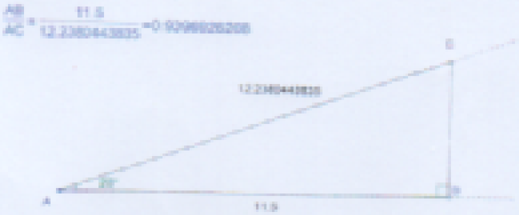


2

II. Formules de trigonométrie

1/ Le cosinus

Activité
(voir sur l'ENT)

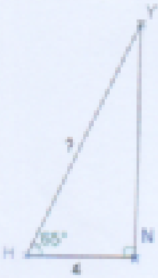


Définition
Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient du côté adjacent sur l'hypoténuse.

Notation

$\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{CA}{CB}$ $\qquad\qquad$ $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB}{CB}$

Exemple type 1



- **Dans le triangle HNY, rectangle en N, appliquons le cosinus.**
- $\cos(\widehat{NHY}) = \dfrac{HN}{HY}$
- $\cos(65) = \dfrac{4}{HY}$
- $\dfrac{\cos(65)}{1} = \dfrac{4}{HY}$ **« On ajoute 1 au dénominateur »**
- $\cos(65) \times HY = 1 \times 4$ **« Produits en croix »**
  $\cos(65) \times HY = 4$
- $HY = \dfrac{4}{\cos(65)}$
  ($HY \approx 9{,}464806333...$ **« Affichage de la calculatrice »)**
- $HY \approx 9{,}5\ cm$ **(arrondi au millimètre près)**

Exemple type 2 : calcul du côté adjacent

- ABC est rectangle en B, on peut appliquer le cosinus.
- $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AB}{AC}$
- $\cos(45) = \dfrac{AB}{3{,}3}$
- $\dfrac{\cos(45)}{1} = \dfrac{AB}{3{,}3}$

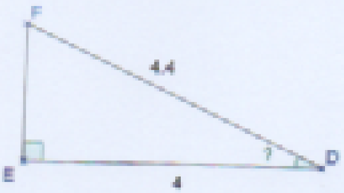
  $\cos(45) \times 3{,}3 = 1 \times AB$

  $\cos(45) \times 3{,}3 = AB$
- $AB \approx 2{,}3$ cm (arrondi au millimètre)

Exemple type 3 : calculer la mesure de l'angle

- EFD est rectangle en E, on peut appliquer le cosinus...
- $\cos(\widehat{FDE}) = \dfrac{ED}{FD}$
- $\cos(\widehat{FDE}) = \dfrac{4}{4{,}4}$
- On utilise la touche $\cos^{-1}$ ou *Acs* ou encore *Arccos*, grâce à la touche *SECONDE* ou *Shift* combinée avec la touche *cos*.

  $\cos^{-1}\left(\dfrac{4}{4{,}4}\right) = 24{,}61997733...$ « Affichage de la calculatrice qui donne l'angle »
- $\widehat{FDE} \approx 25°$ « Arrondi au degré près »



2/ Le sinus

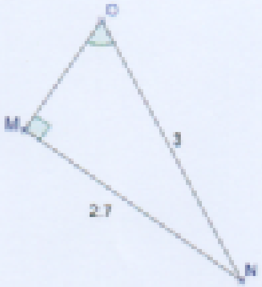
Définition

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au quotient du côté opposé sur l'hypoténuse.

Notation

- $\sin(\widehat{ACB}) = \dfrac{AB}{CB}$
- $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{CA}{CB}$

Exemple type 1



- OMN est un triangle rectangle en M, on peut appliquer le sinus.
- $\sin(\widehat{MON}) = \dfrac{MN}{ON}$
- $\sin(\widehat{MON}) = \dfrac{2,7}{3}$
- On utilise la touche « inverse sinus » de la calculatrice :

  $Asin\left(\dfrac{2,7}{3}\right) \approx 64,15806724...$
- Valeur approchée au degré près : $\widehat{MON} \approx 64°$

Exemple type 2

- On applique le sinus dans le triangle EDF rectangle en D.
- $\sin(\widehat{EFD}) = \dfrac{ED}{EF}$
- $\sin(63) = \dfrac{ED}{3}$

  $\dfrac{\sin(63)}{1} = \dfrac{ED}{3}$

  $\sin(63) \times 3 = ED \times 1$
- $ED = \sin(63) \times 3$
- $ED \approx 2,7\ cm$

3/ Tangente

Définition

Dans un triangle, la tangente d'un angle aigu est égal au quotient du côté opposé sur le côté adjacent.

Notation

- $\tan(\widehat{ACB}) = \dfrac{AB}{AC}$
- $\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{CA}{AB}$

Exemple

$\tan(\widehat{FED}) = \dfrac{FD}{ED}$ $\tan(\widehat{GHI}) = \dfrac{GI}{GH}$ $\tan(\widehat{LKJ}) = \dfrac{JL}{KJ}$ $\tan(\widehat{MON}) = \dfrac{MN}{OM}$

Exemple type 1

- On peut appliquer la tangente car PRI est rectangle en P.
- $\tan(\widehat{PRI}) = \dfrac{PI}{PR}$
- $\tan(63) = \dfrac{2}{PR}$
- $\dfrac{\tan(63)}{1} = \dfrac{2}{PR}$
- $\tan(63) \times PR = 1 \times 2$
  $\tan(63) \times PR = 2$
- $PR = \dfrac{2}{\tan 63}$
- $PR \approx 1\ cm$

4/ Comment retenir les trois formules ??

En apprenant le mot « SOHCAHTOA », on peut retrouver les trois formules :

- SOH : Sinus est égal au côté Opposé sur l' Hypoténuse,
- CAH : Cosinus est égal au côté Adjacent sur l' Hypoténuse,
- TOA : Tangente est égal au côté Opposé sur Adjacent.

5/ Points méthode

7

- Si on ne cherche pas ou si l'on ne connait pas l'hypoténuse, on applique la tangente. Dans le cas contraire, on applique le cosinus ou le sinus.
- L'hypoténuse est toujours au dénominateur.
- Si on cherche une mesure d'angle, on utilise $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ ou $\tan^{-1}$.

III. Relations trigonométriques

1/ Encadrement de cosinus et sinus

On a : $\cos(\widehat{BCA})=\dfrac{BC}{AC}$ et $\sin(\widehat{BCA})=\dfrac{BA}{AC}$.
Dans ces deux formules, on a un dénominateur supérieur au numérateur (l'hypoténuse est le côté le plus long!). Donc :

- $0<\cos(\widehat{BCA})<1$ et $0<\sin(\widehat{BCA})<1$

Ce résultat est vrai peu importe la valeur de l'angle $\widehat{BCA}$.

Remarque

Un résultat du genre $\cos(\widehat{IJK})=\dfrac{7}{5}$ est impossible !!!!!