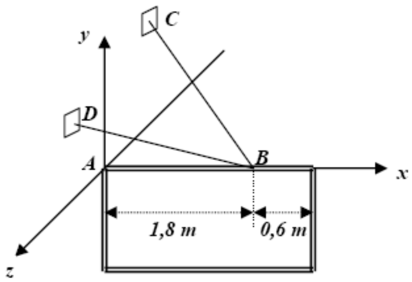
Exercice 01

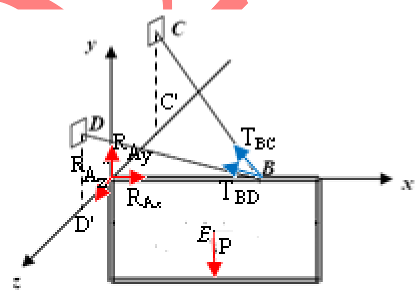
Une enseigne lumineuse rectangulaire de densité uniforme de dimension 1,5 x 2,4m pèse 120 Kg. Elle est liée au mûr par une articulation sphérique et deux câbles qui la maintienne en position d'équilibre statique, comme indiqué sur la figure. Déterminer les tensions dans chaque câble et la réaction au point A. On donne :

C(0 ; 1,2 ; -2,4) , D(0 ; 0,9 ; 0,6). (3pt)



Solution 01

C (0; 1.2; -2.4), D (0; 0.9; -0.6), P = 1200N



$$\overrightarrow{R_A} = \begin{pmatrix} R_{A_x} \\ R_{A_y} \\ R_{A_z} \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -0.7 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{T_{BC}} = \begin{pmatrix} -T_{BC_x} \\ +T_{BC_y} \\ -T_{BC_z} \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{T_{BD}} = \begin{pmatrix} -T_{BD_x} \\ +T_{BD_y} \\ +T_{BD_z} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma\vec{F}_{/A} = \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{T_{BC}} + \overrightarrow{T_{BD}} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\Sigma\vec{M}_{/A} = \overset{0}{\overrightarrow{AA}} \wedge \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{T_{BC}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{T_{BD}} + \overrightarrow{AE} \wedge \vec{P} = \vec{0}$$

Calcul des angles :

L'angle $\widehat{CBC} = 29.02°$, puisque $tg\widehat{CBC} = \frac{CC'}{C'B} = \frac{1.2}{2.163} = 0.554$

CC'=1.2 ; C'B²= AB²+AC'²= 4.68

L'angle $\widehat{C'BA} = 53.13°$, puisque $tg\widehat{C'BA} = \frac{AC'}{AB} = \frac{2.4}{1.8} = 1.33$

AC'=2.4 ; AB=1.8

L'angle $\widehat{D'BD} = 25.37°$, puisque $tg\widehat{D'BD} = \frac{DD'}{D'B} = \frac{0.9}{1.897} = 0.474$

DD'=0.9 ; D'B²= D'A²+AB²= 0.6²+1.8²=3.6

D'B= 1.897

L'angle $\widehat{D'BA} = 18.43°$, puisque $tg\widehat{D'BA} = \frac{AD'}{AB} = \frac{0.6}{1.8} = 0.33$

AD'=0.6

D'où : $T_{BC_y} = T_{BC}\sin\widehat{C'BC} = 0.485\ T_{BC}$

$T_{BD_y} = T_{BD}\sin\widehat{D'BD} = 0.428\ T_{BD}$

$T_{BC_x} = T_{BC}\cos\widehat{C'BC}\ \cos\widehat{C'BA} = 0.6\ \ T_{BC}\ 0.874 = 0.524\ T_{BC}$

$T_{BC_z} = T_{BC}\cos\widehat{C'BC}\ \sin\widehat{C'BA} = 0.8\ \ T_{BC}\ 0.874 = 0.699\ T_{BC}$

$T_{BD_x} = T_{BD}\cos\widehat{D'BD}\ \cos\widehat{D'BA} = 0.903\ \ T_{BD}\ 0.948 = 0.856\ T_{BD}$

$T_{BD_z} = T_{BD}\cos\widehat{D'BD}\ \sin\widehat{D'BA} = 0.903\ \ T_{BD}\ 0.31 = 0.28\ T_{BD}$

Donc : $\overrightarrow{T_{BC}} = \begin{pmatrix} -0.524T_{BC} \\ +0.485T_{BC} \\ -0.699T_{BC} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{T_{BD}} = \begin{pmatrix} -0.856T_{BD} \\ +0.428T_{BD} \\ +0.28T_{BD} \end{pmatrix}$

La projection de l'équation d'équilibre sur les trois axes :

$$\begin{cases} R_{A_X} - 0.524T_{BC} - 0.856T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ R_{A_y} + 0.485T_{BC} - 0.428T_{BD} - P = 0 \ldots\ldots (2) \\ R_{A_Z} - 0.699T_{BC} - 0.28T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Utilisons l'équation d'équilibre des moments :

$$\begin{pmatrix} 1.8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0.524T_{BC} \\ +0.485T_{BC} \\ -0.699T_{BC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0.856T_{BD} \\ +0.428T_{BD} \\ +0.28T_{BD} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 \\ -0.7 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} 0 + 0 + 0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ 1.258\ T_{BC} - 0.504T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots (5) \\ 0.873T_{BC} + 0.77\ T_{BD} - 1.2P = 0 \ldots\ldots (6) \end{cases}$$

$T_{BC} = 0.4\ T_{BD}$

$T_{BD} = 1.071P = 1285.7$ N

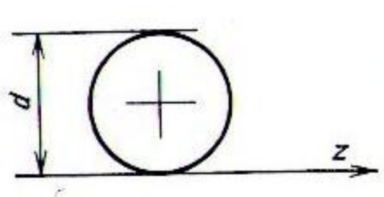
$T_{BC} = 514.2$ N

$R_{A_x} = 1370$ N , $R_{A_y} = 400.33$ N , $R_{A_z} = -0.57$ N

$R_A = \sqrt{R_{A_x}^2 + R_{A_y}^2 + R_{A_z}^2} = 1427$ N

Exercice 02

Déterminer le moment d'inertie de l'aire du cercle, par rapport à l'axe z (1pt)



Solution 02

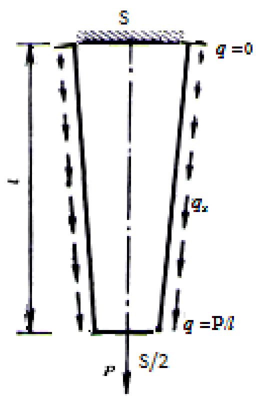
Le moment d'inertie de l'aire du cercle, par rapport à l'axe passant par le centre de gravité

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Utilisons le théorème de **Huygens** : $I_z = I + A(d)^2 = \frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4}\frac{d^2}{4} = \frac{5\,\pi d^4}{64}$

Exercice 03

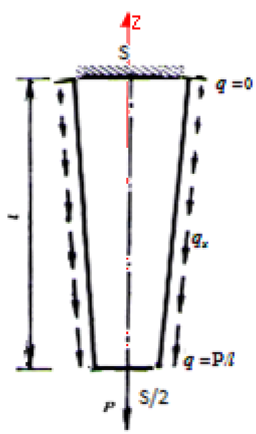
Etant donner P,l, E,S, tracez le diagramme N(x) ,et donnez les expressions de σ(x) et δ(x) pour la barre représentée ci-contre.



Solution 03

Détermination de la fonction de charge :

On a une charge repartie linéairement de type $q_x(z) = \alpha\, z + b$



$q_x(0) = q = \frac{P}{l}$

$q_x(l) = \alpha\, l + \frac{P}{l} = 0$

Donc $q_x(z) = -\frac{P}{l^2}z + \frac{P}{l} = \frac{P}{l}(1 - \frac{z}{l})$

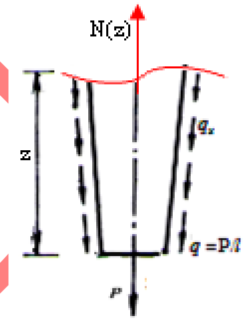
Détermination de la fonction de surface :

$A(z) = \alpha\, z + \beta$

$A(0)=\frac{s}{2} \Rightarrow \beta=\frac{s}{2}$, $A(l)=s \Rightarrow \alpha=\frac{s}{2l}$

D'où: $A(z)=\frac{s}{2}(1+\frac{z}{l})$

Le système est encastré, l'équilibre est assuré donc on peut utiliser la méthode des sections fictives.



Pour $0 \leq z \leq l$

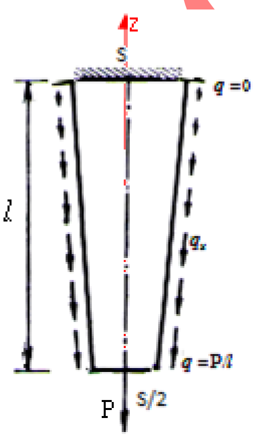
$$N(z) = P + \int_0^z q_x(z)\,dz$$

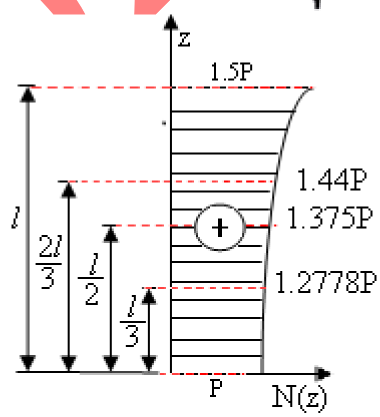
$$= P + \int_0^z \frac{P}{l}\left(1-\frac{z}{l}\right) dz$$

$$= P + \frac{P}{l}\left[z-\frac{z^2}{2l}\right]$$

$$= -\frac{P}{2l^2}z^2+\frac{P}{l}z + P$$

$$N(z) = P\left[-\frac{z^2}{2l^2}+\frac{z}{l}+1\right] \Rightarrow \begin{cases} N(0)=P \\ N(l)=\frac{3}{2}P \end{cases}$$





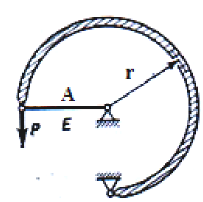
$$\text{D'où : } \sigma(z) = \frac{N(z)}{A(z)} = \frac{2P}{s}\left[\frac{\left(-\frac{z^2}{2l^2}+\frac{z}{l}+1\right)}{\left(1+\frac{z}{l}\right)}\right]$$

Et

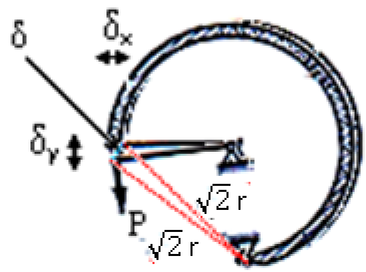
$$\delta(z) = \frac{N(z)\,z}{EA(z)} = \frac{2P\left(-\frac{z^2}{2l^2}+\frac{z}{l}+1\right)z}{Es\left(1+\frac{z}{l}\right)} = \frac{2P}{Es}\left[\frac{\left(-\frac{z^3}{2l^2}+\frac{z^2}{l}+z\right)}{\left(1+\frac{z}{l}\right)}\right]$$

Exercice 04

Déterminer le déplacement δ du point d'application de la force P et les contraintes normales dans les sections droites des barres élastiques?



Solution 04



Les déplacements du point d'application de la force P par rapport au centre mentionné dans la figure

$$\delta_x = \delta_y$$

Et comme l'allongement de la barre élastique est donné par: $\Delta l = \delta_x = \frac{Pr}{EA}$,

Donc: $$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} = \sqrt{2}\,\frac{Pr}{EA}$$

La contrainte dans la barre élastique est: $\sigma = \frac{P}{A}$