Introduction

Pour l'exploitation optimale d'une structure ou un élément de structure, il n'est pas indispensable de satisfaire juste la condition de résistance mais également la condition de rigidité. Les déplacements élastiques des points d'un système résument cette condition.

Les déplacements élastiques des points d'un système articulé sont déterminés d'âpres schéma général suivant :

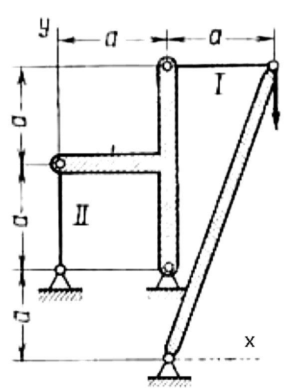
Au moyen des équations de la statique en trouve les efforts longitudinaux dans toutes les barres élastiques des systèmes. D'âpres la loi de Hooke en déterminé les valeurs des allongements absolus.

En admettant que les barres du système ne se séparant pas pendant la déformation, on établit les conditions de compatibilité des déplacements, c'est–à-dire les relations géométriques entre les déplacements des barres du système. Le déplacement recherché s'obtient à partir de ces relations.

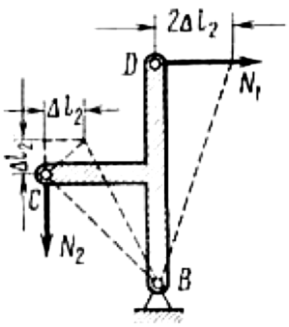
IL faut avoir en vue que chaque barre du système, en plus d'une déformation axiale, peut encore tourner autour du nœud correspondant, c'est pour cela que chaque point de la barre peut se déplacer et suivant l'axe de la barre et suivant un arc circulaire de rayon correspondant. Ces arcs peuvent être remplacés par des perpendiculaires aux rayons de rotation, puisque les allongements élastiques des barres sont négligeables devant leurs longueurs.

Exemple :

Déterminer la projection horizontale δ_x et la projection verticale δ_y du déplacement δ du point d'application de la force P. Les quantités P, α, E_1, A_1, E_2, A_2 sont données.

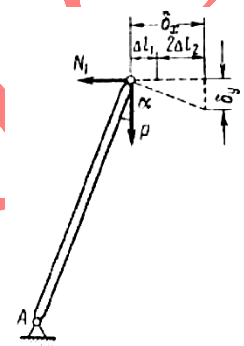


Solution :



D'apres les conditions de ls statique : $\Sigma M_{/A}=0$, $\Sigma M_{/B}=0$, on peut determiner les efforts dans les les tiges : $N_1=P/3$, $N_2=2P/3$

La loi ded Hooke donne : $\Delta l_1=\frac{Pa}{3E_1A_1}$, $\Delta l_2=\frac{2Pa}{3E_2A_2}$



De la geometrie de la figure, on determine le deplacement horzontal ΔL_2 du point c et son deplacement perpendiculairement à BC : $\delta_c=\Delta l_2\sqrt{2}$

Le point D ne peut se deplacer que dans le sens horizontal, ce deplacement est : $\delta_D=\delta_C\frac{2a}{a\sqrt{2}}=2\Delta l_2$

Le deplacement horzontal du point d'application de la force P est la somme du point D et de la tige I :

$$\delta_x=2.\Delta l_2+\Delta l_1=\frac{4Pa}{3E_2A_2}+\frac{Pa}{3E_1A_1}=\frac{Pa}{3}\left(\frac{1}{E_2A_2}+\frac{1}{E_1A_1}\right)$$

Le deplacement vertical du point d'application de la force P

$$\delta_y=\delta_x\,tg(\alpha)=\delta_x\frac{a}{3a}=\frac{Pa}{9}\left(\frac{4}{E_2A_2}+\frac{1}{E_1A_1}\right)$$

Résistance et Rigidité

Les dimensions nécessaires de l'aire A de la section d'une barre en extension ou en compression sont choisies d'âpres de la formule suivante :

$$A = \frac{N_{max}}{[\sigma]}$$

Ou : N_{max} est la valeur absolue maximale de l'effort longitudinal dans la barre à calculer

$[\sigma]$ la contrainte admissible du matériau de la barre ou en traction $[\sigma_t]$, ou en compression $[\sigma_c]$

Pour les matériaux ayants la même résistance en traction et en compression (matériaux plastiques) ; on note :

$$[\sigma_t] = [\sigma_c] = [\sigma] = \frac{\sigma_{éc}}{\eta_{éc}}$$

Ou : $\sigma_{éc}$ est la limite d'écoulement du matériau en traction (en compression)

$\eta_{éc}$ le coefficient de sécurité par rapport à la limite d'écoulement

Si nous posons comme condition supplémentaire que le déplacement élastique δ d'un point quelconque du système ne doit pas dépasser une valeur admissible donnée $[\delta]$, la rigidité se vérifie d'après l'inégalité : $\delta \leq [\delta]$

Systèmes hyperstatiques

On appelle systèmes hyperstatiques les systèmes pour les quels les efforts dans les barres ne peuvent être déterminés par les seules équations de la statique.

Pour calculer les systèmes hyperstatiques, on utilise les équations de la statique et les conditions de compatibilité des déplacements.

Le calcul d'un système articulé hyperstatique se fait dans l'ordre suivant :

Pour un système donné, on écrit tout d'abord les équations de la statique et on établit l'ordre d'hyperstaticité du système; ensuite on dresse les conditions de compatibilité des déplacements, c'est-à-dire les relations géométriques entre les allongements des différentes barres du système.

D'après la loi de Hooke, on explicite les allongements longitudinaux des barres du système en fonction des efforts et on substitue dans les conditions de compatibilité des déplacements.

On résout le système d'équations de la statique et de compatibilité des déplacements obtenu, et on trouve les efforts longitudinaux dans toutes les barres du système.

Lors du calcul des contraintes thermiques, le même schéma de calcul est conservé. Dans ce cas, les équations de la statique sont établies seulement pour les efforts; Les variations des longueurs des barres chauffées ou refroidies sont déterminées en additionnant algébriquement les augmentations (ou les réductions) des longueurs provoquées par les contraintes et la variation de température. L'allongement absolu dû à la variation de température est calculé par la formule : $\Delta l = l.\alpha.\Delta T$

Où : l est la longueur de la barre, α est la valeur moyenne du coefficient de dilatation linéique du matériau de la barre, ΔT est la variation de température.

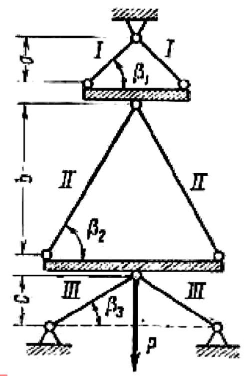
Le calcul des contraintes dues aux défauts de montage est également réalisé à partir des équations de la statique et des conditions de compatibilité des déplacements. Dans ce cas, on établit les conditions de compatibilité des déplacements en prenant en considération l'existence les imprécisions connues dans les longueurs des barres du système. Puisque les longueurs réelles des éléments, qui sont obtenues lors de leur élaboration, diffèrent très peu de celles prévues dans le projet, lors du calcul des allongements absolus des éléments par la loi de Hooke, les longueurs prédites dans le projet sont considérées et non les vraies longueurs.

Lors de la détermination de la force de sécurité maximale à partir du calcul des contraintes admissibles, on suppose que dans la barre la plus chargée, la contrainte est égale à la limite admissible. A partir de l'effort ainsi obtenu, la force maximale de sécurité est établie.

Le calcul des systèmes hyperstatiques en raison de leur capacité de résistance est effectué uniquement grâce aux équations de la statique. Dans ces conditions, les efforts axiaux sont considérés comme égaux aux produits donnés par les contraintes admissibles par les surfaces des sections droites des barres, dans lesquels, lorsque les contraintes atteignent la limite d'écoulement du matériau rendent le système géométriquement déformable.

Exemple :

Etant donné :



a) $E_1 = E_2 = E_3 = E = 2.10^6$ kgf/cm^2;

   [σ] = 1600 kgf/cm²; α = 0.4 m; b= 1,2 m; c = 0,4 m;

   $\beta_1 = 45°$; $\beta_2 = 60°$; $\beta_3 = 30°$;

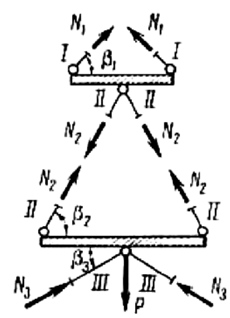
   A_1=12cm²; A_2 14 cm²; A_3=16 cm²;

b) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$=12,5.10^{-6} kgf/cm^2; ΔT=40°c ;

Déterminer: a) P ; P_{max}; σ_I , σ_{II} , σ_{III}

b) σ_I , σ_{II} , σ_{III}

Solution :



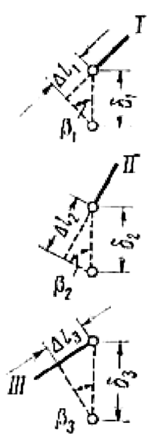
a)

Calcul d'après la contrainte admissible :

Des conditions de la statique qui représentent la somme des projections sur l'axe vertical des forces et des efforts appliqués aux nœuds relevés on obtient :

$$2\ N_1 \sin\beta_1 = 2\ N_2 \sin\beta_2$$

$$2\ N_2 \sin\beta_2 + 2\ N_3 \sin\beta_3 = P$$



La condition de compatibilité des déplacements exprimant l'égalité des déplacements du point d'application de la force P provoqués par la traction des barres I et II et par la compression des barres III, nous donne :

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_3$$

D'après la loi de Hooke, on a :

$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin \beta_1} = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1 \sin \beta_1}$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin \beta_2} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2 \sin \beta_2}$$

$$\delta_3 = \frac{\Delta l_3}{\sin \beta_3} = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3 \sin \beta_3}$$

La géométrie du système permet d'écrire :

$$l_1 = \frac{a}{\sin \beta_1} \; ; \; l_2 = \frac{b}{\sin \beta_2} \; ; \; l_3 = \frac{c}{\sin \beta_3}$$

Après la substitution des valeurs obtenues, la condition de compatibilité des déplacements sera:

$$\frac{N_1 a}{E_1 A_1 \sin^2 \beta_1} + \frac{N_2 b}{E_2 A_2 \sin^2 \beta_2} = \frac{N_3 c}{E_3 A_3 \sin^2 \beta_3}$$

D'après les valeurs numériques données, nous avons :

$$\sin\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \, , \; \sin\beta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \, , \; \sin\beta_2 = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\frac{a}{A_1 \sin^2 \beta_1} = \frac{40 \, . \, 4}{12 \, . \, 2} = \frac{20}{3} \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{b}{A_2 \sin^2 \beta_2} = \frac{120 \, . \, 4}{14 \, . \, 3} = \frac{80}{70} \text{ cm-1}$$

$$\frac{c}{A_3 \sin^2 \beta_3} = \frac{40 \, . \, 4}{16 \, . \, 1} = 10 \text{ cm-1}$$

Substituant ces quantités dans les équations de la statique et l'équation de compatibilité des déplacements nous obtenons le système de trois équations suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\, N_1 = \sqrt{3}\, N_2 \\ \sqrt{3}\, N_2 + N_3 = P \\ 14\, N_1 + 24\, N_2 = 21\, N_3 \end{cases}$$

La solution de ce système est :

$$\begin{cases} N_1 = \sigma_1 A_1 \approx 0.332 \text{ P} \\ N_2 = \sigma_2 A_2 \approx 0.27 \text{ P} \\ N_3 = \sigma_3 A_3 \approx 0.53 \text{ P} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{0.332\ P}{12} \approx 0.0276\ P \\ \sigma_2 = \dfrac{0.27\ P}{14} \approx 0.0193\ P \\ \sigma_3 = \dfrac{0.53\ P}{16} \approx 0.0331\ P \end{cases}$$

Puisque la valeur maximale de la contrainte σ_3 ne doit pas dépasser la valeur admissible $[\sigma]$, donc la force admissible sera :

$$P \leq \frac{[\sigma]}{0.0331} = \frac{1600}{0.0331} \approx 48340 \text{ kgf} \approx 48.3 \text{ t}$$

Avec cette valeur de la force P, les valeurs des contraintes dans les barres du système seront :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 48.3\ 10^3\ 0.0276 \approx 1334 \text{ kgf/cm}^2 \\ \sigma_2 = 48.3\ 10^3\ 0.0193 \approx 932 \text{ kgf/cm}^2 \\ \sigma_3 = 48.3\ 10^3\ 0.0331 \approx 1600 \text{ kgf/cm}^2 \end{cases}$$

Calcul d'après la capacité portante :

Le système sera géométriquement déformable lorsque l'état d'écoulement sera atteint dans la première et la troisième barre.

L'équation de la statique reliant les efforts dans ces barres est :

$$2\ N_1 \sin\beta_1 + 2\ N_3 \sin\beta_3 = P$$

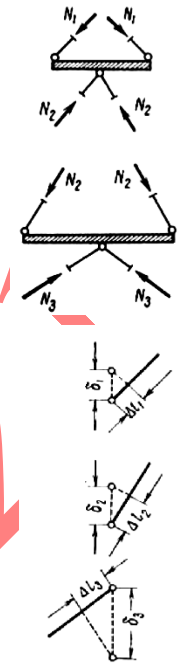
En pesant : $N_1 = [\sigma]\ A_1$ et $N_3 = [\sigma]\ A_3$ et en les substituant dans les équations de la statique, nous obtiendrons la force maximale P_{max} :

$$P_{max} = 2\ [\sigma]\ (A_1 \sin\beta_1 + A_3 \sin\beta_3) = 2\ 1600\ (12\ \frac{\sqrt{2}}{2} + 16\ \frac{1}{2}) \approx 52750 \text{ kgf} = 52.75 \text{ t}$$

Ainsi, la capacité de chargement du système par le calcul d'après la capacité portante est plus grande que celle obtenue par le calcul d'après la contrainte admissible (si l'on admet que les coefficients de sécurité sont les mêmes) :

$$\frac{P_{max} - P}{P}\ 100 = \frac{52.75 - 48.3}{48.3}\ 100 \approx 9.1\ \%$$

b) Détermination des contraintes dues aux à la température :



Les équations de la statique donnes :

$$2\,N_1 \sin\beta_1 = 2\,N_2 \sin\beta_2$$

$$2\,N_2 \sin\beta_2 = 2\,N_3 \sin\beta_3$$

La condition de compatibilité des déplacements (l'invariabilité de la hauteur du système) est :

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$$

Puisque : $\delta_1 = \dfrac{\Delta l_1}{\sin\beta_1}$; $\delta_2 = \dfrac{\Delta l_2}{\sin\beta_2}$; $\delta_3 = \dfrac{\Delta l_3}{\sin\beta_3}$

$$\Delta l_1 = l_1 \alpha_1\,\Delta T - \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$$

$$\Delta l_2 = l_2 \alpha_2\,\Delta T - \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

$$\Delta l_3 = l_3 \alpha_3\,\Delta T - \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3}$$

La condition de compatibilité des déplacements aura la forme :

$$\frac{a}{\sin^2\beta_1}\left(\alpha\,\Delta T - \frac{N_1}{E_1 A_1}\right) + \frac{b}{\sin^2\beta_2}\left(\alpha\,\Delta T - \frac{N_2}{E_2 A_2}\right) + \frac{c}{\sin^2\beta_3}\left(\alpha\,\Delta T - \frac{N_3}{E_3 A_3}\right) = 0$$

En tenant compte de $N_1 = \sigma_1\,A_1$; $N_2 = \sigma_2\,A_2$; $N_3 = \sigma_3\,A_3$, et des valeurs numériques données, on réduit les équations de la statique et la condition de compatibilité des déplacements au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 6\sqrt{2}\,\sigma_1 = 7\sqrt{3}\,\sigma_2 \\ 7\sqrt{3}\,\sigma_2 = 8\,\sigma_3 \\ \sigma_1 + 2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 5000 \end{cases}$$

Résolvons ce système, on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_1 \approx 1105 \text{ kgf} \\ \sigma_2 \approx 774 \text{ kgf} \\ \sigma_3 \approx 1172 \text{ kgf} \end{cases}$$