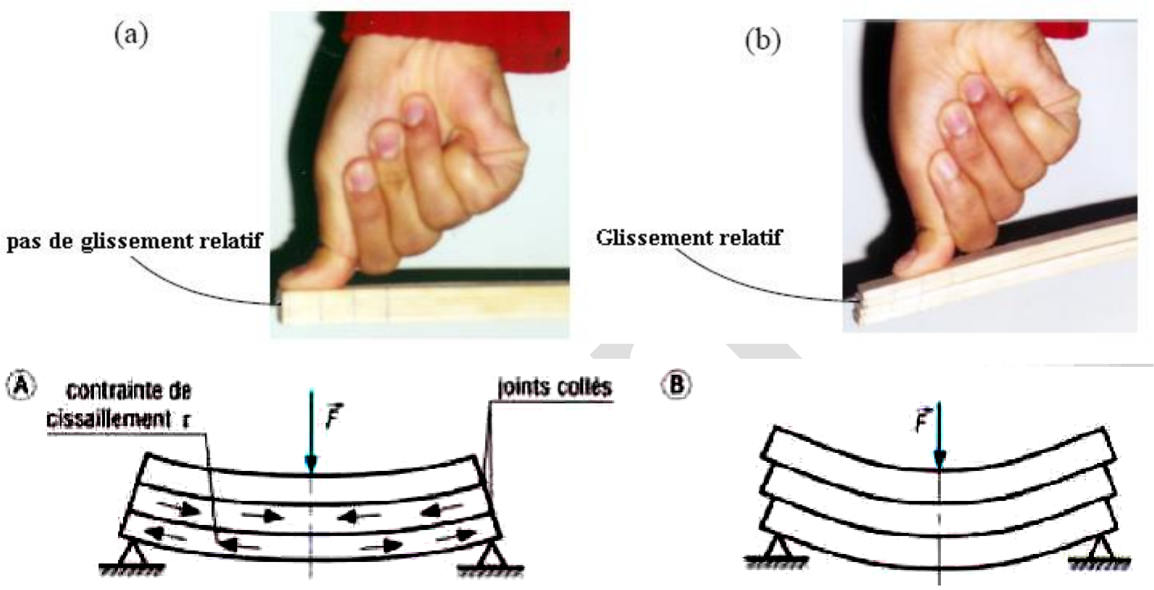
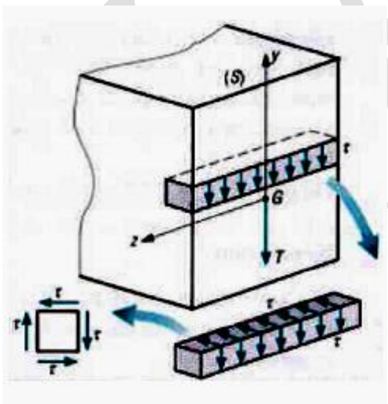
# *Flexion*

## 6. Contraintes de cisaillement en flexion

### 6.1. Mise en évidence




Pour l'exemple ci-dessus, les contraintes de cisaillement $\tau$ qui s'exercent dans les joints collés assurent le maintien (évitent le glissement) entre les poutres respectives et limitent ainsi les déformations.




La figure ci-contre donne la distribution des contraintes de cisaillement dans une section droite (S) supportant un effort tranchant T.

Si les contraintes $\tau$ conservent une valeur constante suivant l'axe z, en revanche elles varient suivant y, avec un maximum près du plan neutre (inverse des contraintes normales $\sigma$).

## 6.2. Cas des poutres rectangulaires

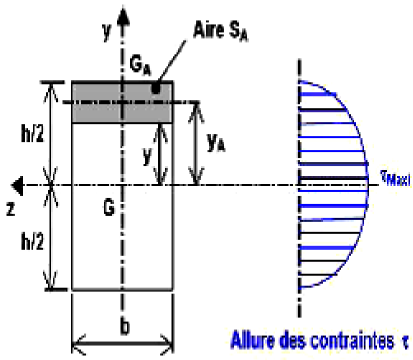
Dans ce cas, la contrainte de cisaillement $\tau$, à la distance y du plan neutre, est donnée par : $\tau = \frac{TQ}{I_z b}$ avec $Q = y_A S_A = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$

$\tau$ : la contrainte de cisaillement à la distance $y$ (MPa)

$Q$ : le moment statique de l'aire hachurée SA ($mm^3$)

T : l'effort tranchant (N)

$I_z$ : le moment quadratique de la section S par rapport à (G, z) ($mm^4$)




**Remarque :** la contrainte est maximale au niveau du plan neutre (y =0) :

$$\tau_{max} = \frac{3T}{2S} = \frac{Th^2}{8I_z}$$

Elle est de 50% plus grande que la contrainte moyenne de cisaillement T/S définie dans le cas du cisaillement pur.

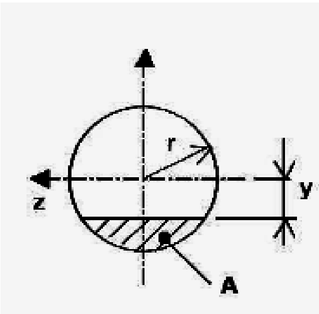
## 6.3. Cas des poutres circulaires

Section circulaire pleine $S = \pi r^2$

$$Q = \frac{2}{3}(r^2 - y^2)^{3/2}$$

$$\tau = \left(\frac{4T}{3\pi r^2}\right)\sqrt{r^2 - y^2}$$

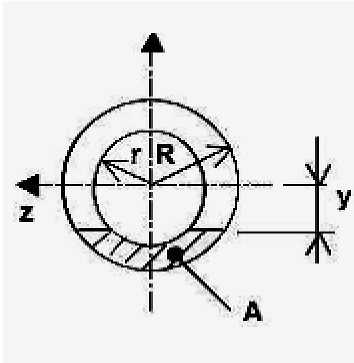
$$\tau_{max} = \frac{4T}{3S}$$



Section circulaire creuse : $S = \pi (R^2 - r^2)$

$$Q = \frac{2}{3}(r^3 - y^3)$$

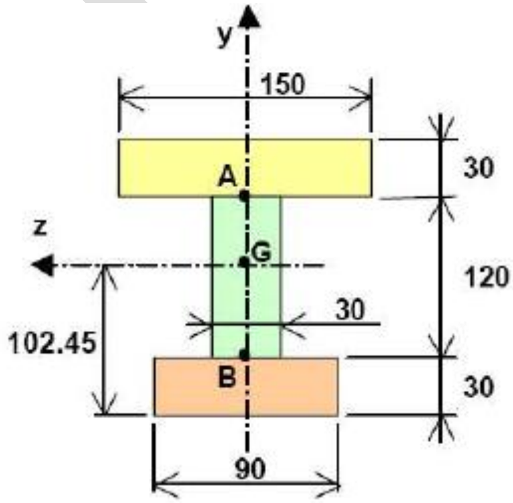
$$\tau_{max} = \frac{4T}{3S}\left(\frac{R^2 + Rr + r^2}{R^2 + r^2}\right)$$




Pour un tube mince $\tau_{max} = \frac{2T}{S}$

## 6.4. Exercice d'application

Un profilé est réalisé à partir de trois plats rectangulaires d'épaisseur 30 mm, collés ensembles en A et B. Si l'effort tranchant est T = 13.5 kN, déterminer les contraintes de cisaillement dans les joints collés. On donne $I_z = 43,7.10^6$ mm$^4$.




Contraintes en A :

$y_A$ = distance entre (G, z) et le barycentre de la surface $S_A$.

$Q_A = S_A\, y_A = (150 \times 30) \times 62.55 = 281475$ mm$^3$

$$\tau_A = \frac{TQ_A}{I_z b_A} = \frac{13500 \times 281475}{43,7.10^6 \times 30} = 2.9\,MPa$$

Contraintes en B :

$y_B$ = distance entre (G, z) et le barycentre de la surface $S_B$

$Q_B = S_B\, y_B = (90 \times 30) \times 87.45 = 236115$ mm$^3$

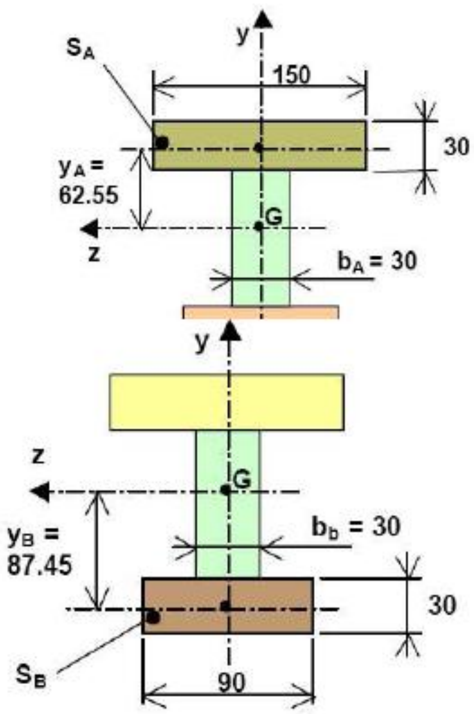
$$\tau_A = \frac{TQ_B}{I_z b_B} = \frac{13500 \times 236115}{43,7.10^6 \times 30} = 2.4\,MPa$$

**Remarque** $I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}$

$$I_{z1} = \frac{150\times30^3}{12} + (150\times30)\times62.55^2 = 17,95.10^6 mm$$

$$I_{z2} = \frac{90\times30^3}{12} + (90\times30)\times87.45^2 = 20,85.10^6 mm^4$$

$$I_{z3} = \frac{30\times120^3}{12} + (30\times120)\times12.545^2 = 4,88.10^6 mm^4$$



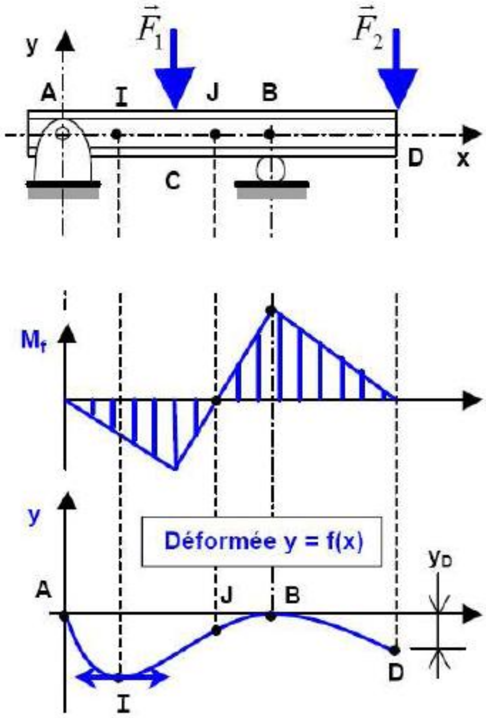

## 7. Déformations en flexion

Dans ce qui précède, on s'est intéressé aux poutres fléchies et à leur dimensionnement d'un point de vue de résistance sous charge. Nous allons voir à présent l'aspect déformation. En particulier, la détermination de la flèche maximale (et de sa valeur admissible) est l'un des éléments fondamentaux de la conception des poutres.

### 7.1. Notion de déformée

Pour la poutre ci-dessous, la ligne moyenne AICJBD a pour direction l'axe des x avant déformation et la courbe y = f(x) après déformation. Cette courbe est appelée déformée. y = f(x) est l'équation mathématique de la déformée dans le système d'axes (x, y).

**Conditions aux limites :**




Les conditions $y_A = 0$, $y_B = 0$ et $y'_I = 0$, appelées conditions aux limites, sont des éléments connus de la déformée. Ces éléments sont imposés par les appuis A et B ou par la forme de la déformée.

**Flèches :**

La déformée présente des valeurs maximales en I (entre A et B) et à l'extrémité D. Pour ces points particuliers, la déformation est souvent appelée flèche (f) :

$f_I = y_I$ et $f_D = y_D$

## 7.2. Méthode par intégration

### 7.2.1. Principe

Connaissant l'équation des moments fléchissants $M_f$ en fonction de x (position le long de la poutre), la pente y' et la déformée y sont obtenues par intégrations successives à partir de :

$$M_f = -EIy''$$

avec

$M_f$ : le moment fléchissant (équation en x)

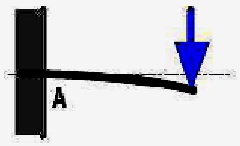
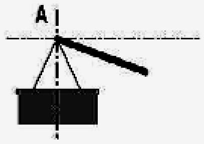
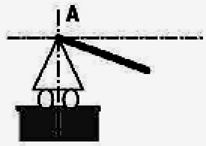
$E$ : le module d'élasticité longitudinale (MPa).

$I = Iz$ : le moment quadratique de la section par rapport à l'axe (G, z) (mm4)

$y''$ : la dérivée seconde de la déformée y.

**Remarque :**

Les constantes d'intégration successives sont calculées à partir des conditions aux limites imposées par la position et la nature des appuis, ou encore par la forme générale de la déformée.

| Exemples usuels de conditions aux limites | | |
|---|---|---|
| Encastrement | Articulation | Appui simple |
|   |   |   |
| $y'_A = 0$<br>$y_A = 0$ | $y_A = 0$ | $y_A = 0$ |

### 7.2.2. Exercice d'application

Considérons la poutre ci-contre, de longueur L = 4 m, soumise à une charge ponctuelle en son milieu.

L'étude statique permet de déterminer les actions des appuis sur la poutre: $A = B = \frac{P}{2} = 500$ daN

**Moments fléchissant**:

Pour $0 \leq x \leq 2m$

$$Mf_{AC} = -\frac{P}{2}x = -500x$$

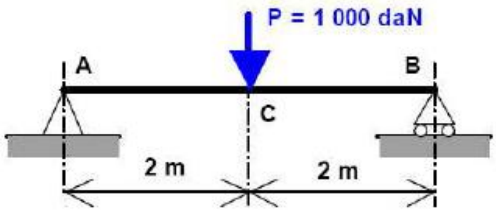
Pour $2 \leq x \leq 4m$

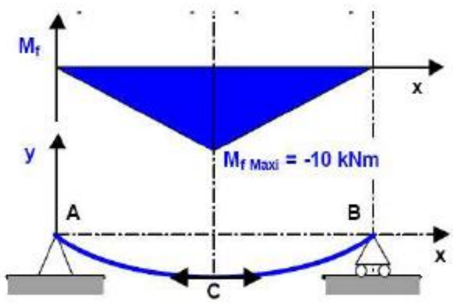
$$Mf_{AC} = -\frac{P}{2}x + P(x - \frac{L}{2}) = 500(x-4)$$

Equation de la déformée :

$$Mf_{AC} = -EIy_{AC}''$$

On donc : $-EIy_{AC}'' = -\frac{P}{2}x$



Ou encore $EIy''_{AC} = \frac{P}{2}x$

La première intégration donne : $EIy'_{AC} = \frac{P}{4}x^2 + C_1$ (1)

La seconde intégration donne : $EIy_{AC} = \frac{P}{12}x^3 + C_1x + C_2$ (2)

Conditions aux limites :

On a y = 0 au point A (x = 0) : l'équation (2) donne : $C_2 = 0$

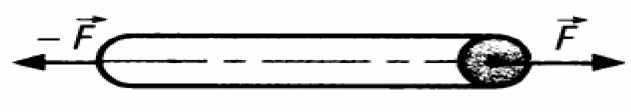
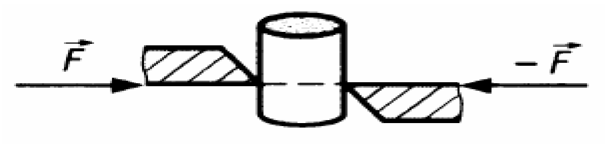
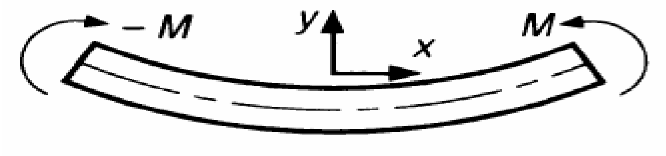
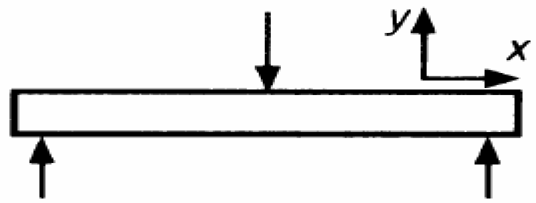
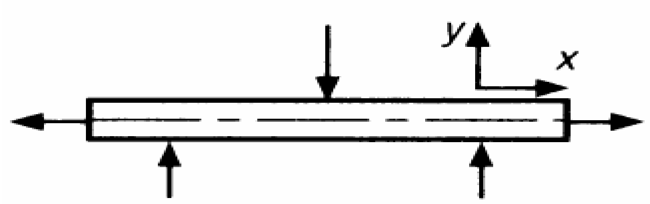
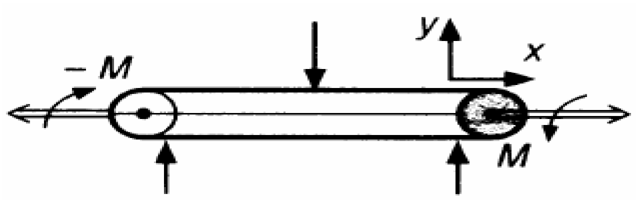
et $y'_C = 0$ au point C (x = L/2) : l'équation (1) donne : $C_1 = -\frac{P\times(\frac{L}{2})^2}{4} = -\frac{PL^2}{16}$

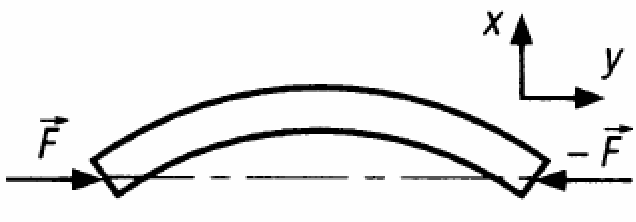
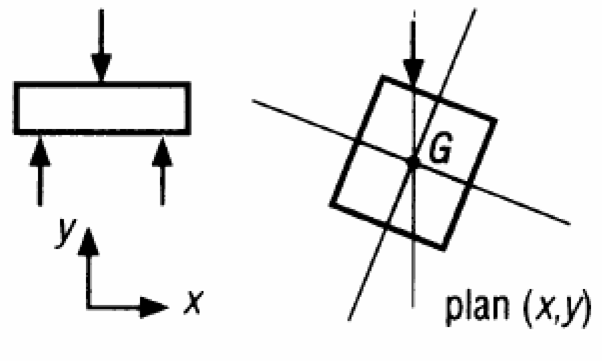
Finalement

$$y_{AC}' = \frac{P}{4EI}(x^2 - \frac{L^2}{4}) \text{ et } y_{AC} = \frac{P}{4EI}(\frac{x^3}{3} - \frac{L^2}{4}x)$$

Flèche : la flèche maximale est obtenue pour x = L/2 : $f_{max} = y_c = -\frac{PL^3}{48EI}$

## Les différents types de sollicitations sont:

| | |
|---|---|
| Traction ou Extension / Compression |   |
| **CISAILLEMENT** |   |
| Torsion |   |
| Flexion pure |   |
| Flexion simple |   |
| Flexion + traction |   |
| Flexion + torsion |   |

| | |
|---|---|
| Flambage |  |
| Flexion déviée |  |