III. Lois fondamentales de l'hydrodynamique

Définition : L'hydrodynamique souterraine est une branche de l'hydrogéologie. Elle a pour but :

- d'étudier les lois qui régissent l'écoulement souterrain (dans l'écorce terrestre) ;
- d'élaborer à cet effet les bases mathématiques et les méthodes d'évaluation quantitative des conditions de formation des eaux souterraines,
- pour une gestion rationnelle de la ressource.

III.1. Equation d'état isotherme du fluide

Les équations d'état caractérisent le comportement du milieu et du liquide dans les conditions de filtration (écoulement dans la roche). Elles lient la déformation de la couche aux variations de pression de la roche et de l'eau. Ces conditions se rencontrent dans les roches profondes où, les variations de la viscosité, de la densité et de la compressibilité de l'eau sont fonction de la pression et de la température.

Dans leur forme générale, les équations d'état de l'eau et du milieu poreux s'expriment de la façon suivante :

$$\rho / \mu = f(P, t°) \text{ pour le liquide et,}$$

$$n_a = f(P) \text{ pour le milieu poreux}$$

Il faut savoir que le volume des vides de la roche est caractérisé par la porosité active $\mathbf{n_a}$, qui peut subir des variations sous la pression hydrostatique. Si nous tenons compte des propriétés élastiques du liquide filtrant, la variation du volume (dV) dùe à la variation de pression suit la loi de **Hooke R.** qui s'écrit :

$$dV / V = -\beta_e \,.\, dP \qquad \text{(III.1)}$$

Nous constatons que l'augmentation de la pression entraine la diminution du volume du liquide et inversement (ce qui est représenté par le signe [-]. La capacité du liquide à changer son volume sous une unité de pression est caractérisée par le coefficient de compressibilité : $\boldsymbol{\beta_e}$

La diminution se déduit de la formule suivante :

$$\beta = -\frac{1}{V_{eau}}\frac{dV_{eau}}{dp} \qquad [Pa^{-1}]$$

Où V est le volume du fluide (eau) et P, la pression de l'eau
en 1/ atm., ou en 1/m (hauteur de colonne d'eau)
β_e = 4.4x10-10 Pa-1 en condition standard.

$1/\beta_e$: est appelé module d'élasticité volumique en (atmosphère)

En considérant que :

$$V_e = M_e / \rho_e \quad et,$$

$$d(Ve) = d(M_e / \rho_e) = -M_e . d\rho / \rho_e^2$$

Donc ;

$$\beta_e = -\rho_e / M_e . \frac{(-M_e . d\rho_e / \rho_e^2)}{dP} = 1/\rho_e . d\rho / dP$$

Cette équation représente l'équation d'état du liquide. Pour l'obtenir nous avons considéré que la variation du volume dV, est liée directement à la variation de la densité $d\rho_{e}$, vu que la masse M_e reste inchangée pour des variations de volume (loi de conservation de la masse).
Si nous intégrons l'équation obtenue de P_0 à P et de ρ_0 à ρ_e, nous aurons :

$$\rho_e = \rho_e^0 e^{\beta e(p - p0)}$$

ρ_e^0 densité de l'eau à la pression atmosphérique (g/cm^3).

La variation du volume de la couche sous l'influence de la pression hydrostatique correspond à la variation du volume des vides.

La pression qui s'exerce sur le squelette de la roche aquifère (grains) ; P_{sq} est déterminée par la différence entre la pression de la roche qui correspond aux poids des roches sus-jacentes ($Poids_{roche}$) et la pression hydrostatique de l'eau ($P_{aquifère}$).

Donc ; $$P_{sq} = P_{roche} - P_{aquifère}$$

Nous voyons bien que si la pression hydrostatique diminue, la pression sur le squelette de la roche $\mathbf{P_{sq}}$ augmente, ce qui entraine forcément la diminution du volume des pores de la roche. La variation du volume des vides d'un milieu poreux élastique suit la loi de Hooke ; d'où :

$$dV_{vides} / V_{roche} = - \beta_r . dP_{sq} \qquad \text{(III.2)}$$

Le signe [-], dans cette formule montre que le volume des vides augmente quand la pression sur le squelette de la roche diminue. La capacité de variation du volume des pores de la roche est caractérisée par le coefficient de compressibilité de la roche $\boldsymbol{\beta_r}$:

$$\beta_r = - 1 / V_r . dV_{vides} / dP_{sq} \quad \text{(1/atm. ou 1/m)}$$

Nous savons que ; $dP_{sq} = d(P_{roche} - P_{aquifère})$

La pression P_{roche} ne varie pas vu que les grains (sq) ne subissent pas de variation de volume, nous aurons dans ce cas :

$$dP_{sq} = - dP_{aquifère}) \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\beta_r = - 1 / V_r . dV_{vides} / dP_{aquifère}}} \qquad \text{(III.3)}$$

Cette équation représente l'équation d'état du milieu poreux dans un système captif.

Si nous considérons la variation du volume des vides par rapport à la roche entière ;

$$\boldsymbol{dV_{vides} / dV_{aquifère}}$$

Ceci correspond en définitive à la variation de la porosité dn_a :

$$dV_{vides} / V_r = d(n_a V_r) / V_r = dn_a$$

Nous pouvons écrire que :

$$dn_a = \beta_{roche} . dP_{aq} \qquad \text{(III.4)}$$

III.2. Equation de continuité

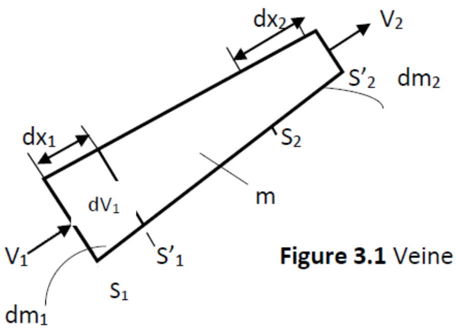

Figure 3.1 Veine de fluide parfait incompressible

Considérons une veine de fluide incompressible de masse volumique ρ, animé d'un écoulement permanent (Fig.3.1). On désigne par :

S_1 et S_2 respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t,
S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t' (t+dt),
V_1 et V_2 les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections S1 et S2 de la veine,
dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt,
dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1,
dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2,
m : masse comprise entre S_1 et S_2,
dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1,
dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2,
A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à (dm_1+m),
A l'instant t' : le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(m+dm_2)$.

La masse déplacée étant conservée, on écrit alors : $dm_1+m = m+dm_2$; soit $dm_1 = dm_2$

Alors :

$$\rho_1 dV_1 = \rho_2\, dV_2 \text{ ou encore : } \rho_1\, S_1\, dx_1 = \rho_2\, S_2\, dx_2$$

En divisant par dt, on obtient :

$$\rho_1 S_1 \overbrace{\frac{dx_1}{dt}}^{V_1} = \rho_2 S_2 \overbrace{\frac{dx_2}{dt}}^{V_2} \Longrightarrow \rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2$$

Puisque le fluide est considéré comme incompressible : $\rho_1 = \rho_2$, on obtient l'équation de continuité suivante :

$$\boxed{S_1 V_1 = S_2 V_2} \qquad \text{(III.4)}$$

Cette relation représente le débit volumique Q exprimé en (m^3/s). L'équation de continuité représente la loi de conservation de masse.

III.2.1. Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport *dm*/*dt* quand *dt* tend vers 0.

$$q_m = \frac{dm}{dt} \qquad \text{(III.5)}$$

Où :
qm : masse de fluide par unité de temps traversant une section droite de la veine [kg/s],
dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt,
dt : intervalle de temps en (s).

En tenant compte des équations précédentes, on obtient :

$$q_m = \rho.S.\mathrm{V}$$

Ou encore :

$$q_m = \rho.S_1.\mathrm{V}_1 = \rho.S_2.\mathrm{V}_2$$

Compte tenu de la conservation de masse, on peut généraliser l'équation.

$$\boxed{q_m = \rho.S.\mathrm{V}} \qquad \text{(III.6)}$$

q_m : Débit massique (kg/s),
ρ: masse volumique (Kg/m^3),
S : section de la veine fluide (m^2),
V : vitesse moyenne du fluide à travers la section S (m/s).

III.2.2. Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport **dV /dt** quand dt tend vers zéro.

$$\boxed{q_v = \frac{dV}{dt}} \qquad \text{(III.7)}$$

Où :
qv : volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite (m^3/s),
dV : volume élémentaire en (m^3) traversant une section S pendant un intervalle de temps dt,
dt : intervalle de temps en secondes (s).

Relation entre le débit massique qm et le débit volumique qv :

$$\boxed{q_v = \frac{q_m}{\rho} = \frac{\cancel{\rho}.S.V}{\cancel{\rho}} = S.V} \qquad \text{(III.8)}$$