III.3. Théorème de Bernoulli (Conservation de l'énergie)

- Cas sans échange d'énergie

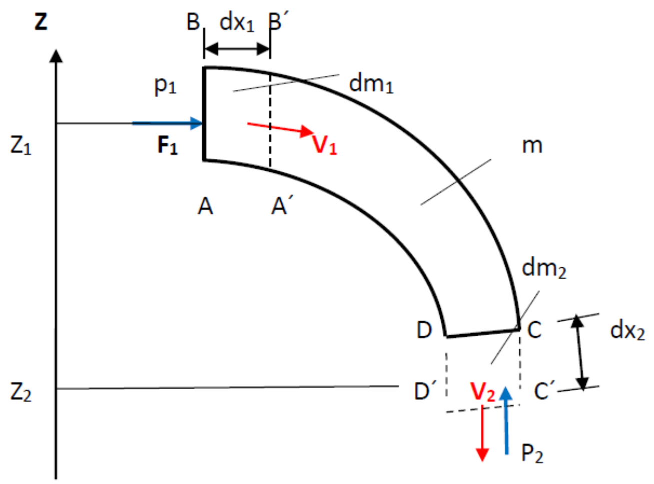
Hypothèses :

- Le fluide est parfait et incompressible,
- L'écoulement est permanent,
- L'écoulement est dans une conduite lisse.

Application du théorème de l'énergie cinétique

La relation de Bernoulli est une équation de conservation de l'énergie mécanique du fluide au cours de son mouvement.

A l'instant t : masse fluide ABCD et à l'instant t+dt : masse fluide A´B´C´D´



Théorème de l'énergie cinétique

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les instants t et t+dt.

La variation de l'énergie cinétique ΔE_c est égale à la somme des travaux des forces extérieures (poids de l'élément fluide, forces de pression).

$$\Delta E_c = \sum W \vec{F}_{ext} \Longrightarrow \frac{1}{2}\, dm\,(V_2^2 - V_1^2) = dm\,.g\,(z_1 - z_2) + (p_1\, S_1\, dx_1 - p_2\, S_2\, dx_2)$$

$$= dm\,.g\,(z_1 - z_2) + p_1 \underbrace{S_1\, dx_1}_{dV_1} - p_2 \underbrace{S_2\, dx_2}_{dV_2}$$

$$\frac{1}{2}\, dm\,(V_2^2 - V_1^2) = dm\,.g\,(z_1 - z_2) + (p_1\, dV_1 - p_2\, dV_2)$$

$$dm = \rho dV \longrightarrow dV = \frac{dm}{\rho}$$

$$\frac{1}{2}\, dm\,(V_2^2 - V_1^2) = dm\,.g\,(z_1 - z_2) + (p_1\, dm_1/\, \rho_1 - p_2\, dm_2/\, \rho_2)$$

Fluide incompressible : $\rho_1 = \rho_2$

$$\frac{1}{2}\, \cancel{dm}\,(V_2^2 - V_1^2) = \cancel{dm}\,.g\,(z_1 - z_2) + \cancel{dm}\,(p_1 / \rho - p_2 / \rho)$$

$$\frac{1}{2}\,(V_2^2 - V_1^2) = g\,(z_1 - z_2) + (p_1 / \rho - p_2 / \rho)$$

$$\boxed{\text{D'où: } \frac{\rho}{2}\,\vartheta^2{}_A + \rho\, g\, Z_A + P_A = \frac{\rho}{2}\,\vartheta^2{}_B + \rho\, g\, Z_B + P_B} \quad \text{(III.9)}$$

Avec: $\frac{\rho}{2}$ V^2: pression dynamique. $\rho\, g\, z$: pression de pesanteur. P: pression statique.

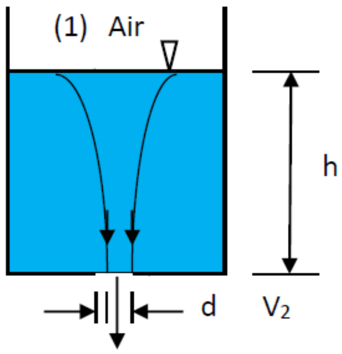
- Formes de l'équation de BERNOULLI

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{p_1}{\rho}+\frac{v^2{}_1}{2}+g\,Z_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v^2{}_2}{2}+g\,Z_2 && \text{(J/kg)}\\
&p_1+\rho\frac{v^2{}_1}{2}+\rho g\,Z_1=p_2+\rho\frac{v^2{}_2}{2}+\rho g\,Z_2 && \text{(Pa)}\\
&\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v^2{}_1}{2g}+Z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v^2{}_2}{2g}+Z_2 && \text{(m)}
\end{aligned}\right\}$$

III.3.1. Applications du théorème de Bernoulli

III.3.1.1. Formule de Torricelli

On considère un réservoir de grandes dimensions ouvert à l'atmosphère contenant un liquide de masse volumique ρ et percé d'un petit orifice à sa base à une hauteur h de la surface libre. (S >>s).



On applique le théorème de Bernoulli entre deux points (1) et (2) d'une même ligne de courant (surface libre et la sortie de l'orifice).

$$\cancel{\frac{p_1}{\rho}}+\cancel{\frac{v^2{}_1}{2}}+g\,Z_1=\cancel{\frac{p_2}{\rho}}+\frac{v^2{}_2}{2}+g\,\cancel{Z_2}$$

Hypothèses :

- $P_1 = P_2$ =patm
- $Z_2 = 0$; $Z_1 = h$ (plan de référence en 2)
- S >>s, $V_2 >> V_1$ donc $V_1 = 0$ (négligeable)

$$\boxed{V_2=\sqrt{2gh}} \quad \text{(III.10)}$$

<u>C'est la vitesse d'un corps en chute libre d'une hauteur h</u>.

Théorème de Torricelli : « la vitesse d'écoulement d'un fluide dans un réservoir ouvert à travers un orifice situé à la profondeur H est : et : $v_2=\sqrt{2gH}$ »

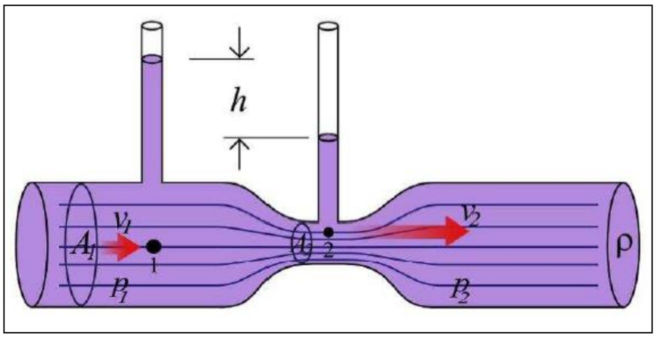
III.3.1.2. Effet VENTURI

Canalisation horizontale (c-à-dire : $z_1 = z_2$)

Un venturi est un étranglement de conduit, limité par les sections S_1, (A_1) et S_2, (A_2) où les pressions sont respectivement P_1 et P_2. Un tel appareil permet de mesurer le débit volumique du fluide.

La vitesse du fluide circulant dans la conduite augmente dans l'étranglement et sa pression diminue :

$V_2 > V_1$
$P_2 < P_1$



L'équation de continuité nous donne :

$$\mathbf{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$

Si ; $\mathbf{A_1 > A_2}$,
Alors ; $\mathbf{v_2 > v_1}$

En vertu du théorème de Bernoulli, la pression doit chuter à l'endroit de l'étranglement. La chute de pression étant fonction de la vitesse d'écoulement. En pratique, sa mesure est réalisée au moyen d'étroites colonnes insérées dans le tube.

En appliquant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les deux points (1) et (2), on obtient :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

Ici $z_1 = z_2$ (écoulement horizontal) et l'équation de continuité permet d'écrire :

$$Q_v = S_1 V_1 = S_2 V_2 \Longrightarrow V_2 = S_1 \frac{V_1}{S_2}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g}\left[(\frac{S_1}{S_2})^2 - 1\right] = \frac{v_1^2}{2g}\left[(\frac{D_1}{D_2})^4 - 1\right]$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{v_1^2}{2}\left[(\frac{D_1}{D_2})^4 - 1\right]$$

S_1 et S_2 sont connues (caractéristiques du venturi), P_1 et P_2 sont données par les hauteurs du liquide manométrique dans le manomètre, on détermine donc la vitesse V_1.

$$\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[(\frac{D_1}{D_2})^4 - 1]}}} \qquad \text{(III.11)}$$

La mesure de (P_1 - P_2) et la connaissance des aires A_1 et A_2 permettent de déterminer v_1, et par la suite v_2.

III.3.1.3. Tube de PITOT

Permet de calculer la vitesse d'un écoulement.

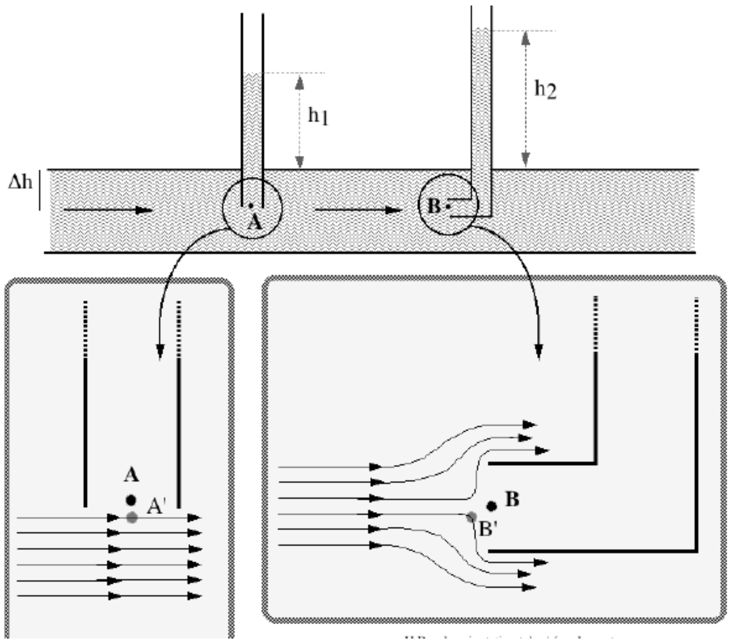
Le tube de Pitot sert à mesurer la vitesse locale d'un fluide en le reliant à la différence de pression d'un manomètre à liquide. On considère un écoulement et on plonge un tube de Pitot de telle sorte qu'il soit parallèle aux lignes de courant. A son embouchure, le fluide peut pénétrer. Une fois qu'il a occupé tout l'espace disponible au sein du tube, il n'y a plus de fluide qui entre et la vitesse au point B, embouchure du tube, est donc nulle. On l'appelle un point d'arrêt de la ligne de courant.

On considère un liquide en mouvement dans une conduite horizontale, plaçons un tube ouvert dur l'extrémité est perpendiculaire à la direction d'écoulement.

Au point A, on observe que le liquide monte dans le tube à une hanteur h_1. On place en un point B voisin de A un autre tube ouvert de forme différente, on constate que le liquide monte à une hanteur h2 supérieure à h_2.

On peut écrire: $h = h_2 - h_1$.

Appliquons l'équation de Bernoulli aux points A et B:



$$\frac{\rho}{2}\vartheta^2_A + \rho\, g\, Z_A + P_A = \frac{\rho}{2}\vartheta^2_B + \rho\, g\, Z_B + P_B.$$

Comme :

$$Z_A = Z_B \text{ et } \vartheta_B = 0.$$

Alors :

$$P_B - P_A = \frac{\rho}{2}\vartheta^2_A \ldots(1)$$

Dans les tubes verticaux, le liquide est au repos, donc on lui applique la relation fondamentale de l'hydrostatique, on aura:

$$\left.\begin{array}{l} P_A - P_{at} = \rho\ g\ h_1 \\ \\ P_B - P_{at} = \rho\ g\ h_2 \end{array}\right\} P_B - P_A = \rho\ g\ (h_2 - h_1) = \rho\ g\ h \ \ldots\ (2)$$

Puisque (1) =(2), alors : $\frac{\rho}{2}\vartheta^2 a = \rho\ g\ h \rightarrow \vartheta\ a = \sqrt{2\ gh}$ ou.

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_B - p_A)}$$

Conclusion

La relation de Bernoulli est une équation de conservation de l'énergie mécanique du fluide au cours de son mouvement. Elle s'applique dans plusieurs cas dans le domaine de l'hydraulique.