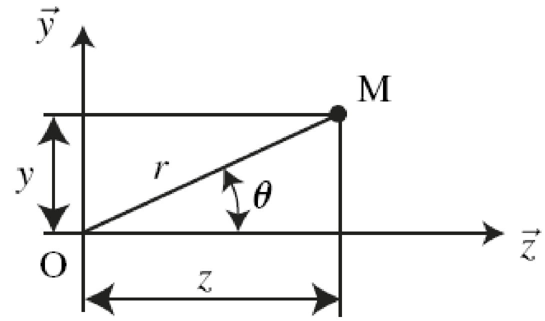
Préambule

Les calculs des différentes intégrales se font dans un repère cartésien ou dans un repère cylindrique.

	Coordonnées du point	Surface infinitésimale ds
Repère cartésien	(y, z)	dy dz
Repère cylindrique	(r, θ)	r dr dθ



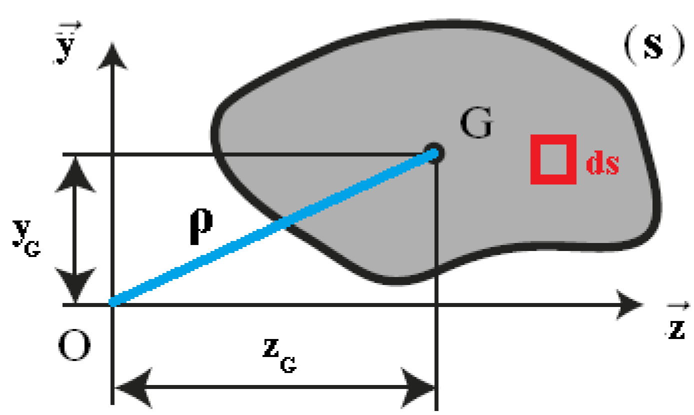
$$z = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$r^2 = y^2 + z^2$$

Définitions

1. **Surface**

Soit la section arbitraire s, l'aire de cette section (**s**) est donnée par :

$$A = \iint_s ds$$



2. Centre de gravité

Position du centre de gravité de la section (s) par rapport à l'axe oz :

$$z_G = \frac{\iint_S z\,ds}{\iint_S ds} \qquad \text{(unité en centimetre)}$$

Position du centre de gravité de la section (s) par rapport à l'axe oy :

$$y_G = \frac{\iint_S yds}{\iint_S ds} \qquad \text{(unité en centimetre)}$$

Moment statique

Moment statique de la section (s) par rapport à l'axe oz :

$$S_z = \int_S y\,ds = \iint_D y\,dy\,dz = y_G.ds \qquad \text{(unité en centimetre}^3\text{)}$$

Moment statique de la section (s) par rapport à l'axe oy :

$$S_y = \int_S z\,ds = \iint_D z\,dy\,dz = z_G.ds \qquad \text{(unité en centimetre}^3\text{)}$$

Le moment statique d'une surface est égal au produit de sa surface par la distance de son centre de gravité.

Remarque

Le moment statique d'une surface est nul par rapport à un axe passant par son centre de gravité.

Moment d'inertie (ou moment quadratique)

1. Moment d'inertie par rapport à un axe

Moment d'inertie de la section (s) par rapport à l'axe oz :

$$I_z = \int_S y^2\,ds = \iint_D y^2 dy\,dz \qquad \text{(unité en centimetre}^4\text{)}$$

Moment d'inertie de la section (s) par rapport à l'axe oy :

$$I_y = \int_S z^2 ds = \iint_D z^2 dy\, dz \qquad (\text{ unité en centimetre}^4)$$

Remarque

Le moment d'inertie d'une surface ne peut être que positif.

2. Moment d'inertie polaire

Moment polaire de la section (s) $I_p = \int_S \rho^2 ds$

Puisque $\rho^2 = y^2 + z^2$, $I_p = \int_S (y^2 + z^2) ds = \int_S y^2 ds + \int_S z^2 ds = I_y + I_z$

Remarque

Le moment d'inertie polaire d'une surface ne peut être que positif.

Si la section possède un axe de symétrie, cet axe est un axe principal d'inertie.

Si la section possède deux axes de symétrie, ces axes sont des axes principaux d'inertie.

3. Produit d'inertie

Produit d'inertie de la section (s) par rapport aux axes oy et oz :

$$I_{yz} = \int_S zy\, ds = \iint_D zy\, dy\, dz$$

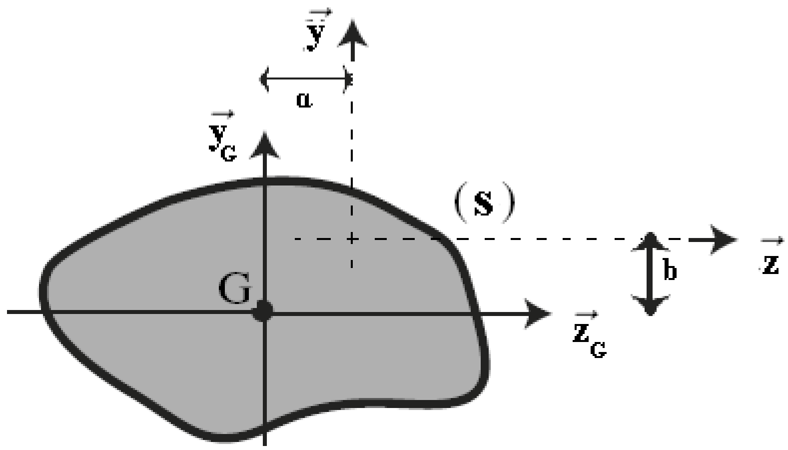
Remarque

Le produit d'inertie 'une surface peut être positif, négatif ou nul ; il est nul quand les axes (ou un seul axe) soient (soit) des axes (ou un axe) de symétrie.

Les moments d'inertie sont respectivement maximal par rapport à un axe et minimal par rapport à l'autre. Ces moments sont alors appelés moments principaux d'inertie.

4. Moment d'inertie par rapport à un axe parallèle

Supposons que les moments d'inertie I_z I_y sont connus



$I_y=\int_s z^2 ds$, $y = y_G - b \rightarrow I_y=\int_s (y_G^2 - 2by_G + b^2)\, ds$

$$I_z=\underbrace{\int_s y_G^2\, ds}_{I_{z_G}} - 2b \underbrace{\int_s y_G\, ds}_{0} + b^2\int_s ds$$

D'où : $I_z = I_{z_G} + b^2 s$ et $I_y = I_{y_G} + \alpha^2 s$

Théorème de Huygens

Le moment d'inertie d'une section par rapport à un axe parallèle à l'axe passant par le centre de gravité de la section est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre de gravité de cette section plus le produit du carré de distance entre les deux axes et l'aire de cette section (s).

5. Le produit d'inertie d'une section par rapport à deux axes parallèles

Etant le produit d'inertie I_{yz} d'une section connu, $I_{yz}= \int_s yz\, ds$

D'où

$$\mathbf{I_{yz}} = \int_s (y_G - b)(z_G - a)\,ds = \int_s y_G z_G\,ds - b\cancelto{0}{\int_s z_G\,ds} - a\cancelto{0}{\int_s y_G\,ds} + ab\int_s ds$$

$$\mathbf{I_{yz}} = \mathbf{I_{y_G z_G}} + a\,b\,s$$

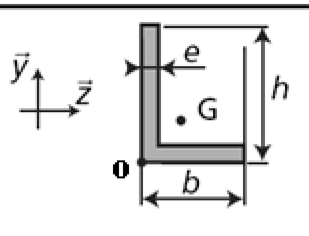
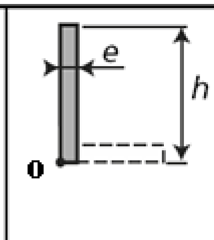
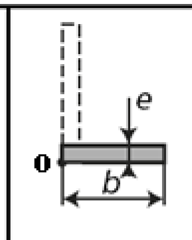
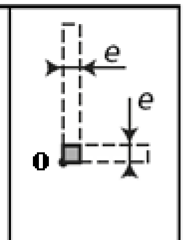
6. Moment d'inertie d'une section composée

Une section (s) peut être décomposée en n sections élémentaires (s_i), $i \in \{1, .., n\}$. Les caractéristiques géométriques de la section (s) peuvent être calculées à partir de la somme algébrique des caractéristiques géométriques des sections (s_i), en utilisant si nécessaire le théorème de **Huygens** pour le transport des inerties.

Exemple. Calcul des caractéristiques d'une cornière en L.

La surface de la cornière est :

$$(s) = (s_1) + (s_2) - (s_3)$$

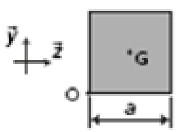
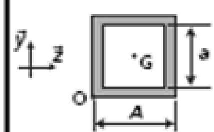
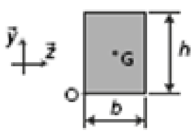
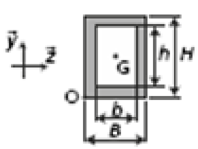
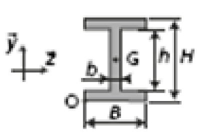
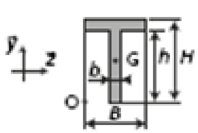
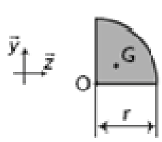
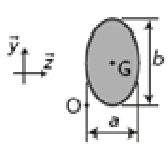
	(s)	(s_1)	(s_2)	(s_3)
Section	$e(h+b-e)$	he	be	e^2
Moment statique $/\mathbf{o}\vec{z}$	$\frac{e}{2}(h^2+be-e^2)$	$\frac{eh^2}{2}$	$\frac{be^2}{2}$	$\frac{e^3}{2}$
Moment d'inertie $/\mathbf{o}\vec{z}$	$\frac{e}{3}(h^3+be^2-e^3)$	$\frac{eh^3}{3}$	$\frac{be^3}{3}$	$\frac{e^4}{3}$

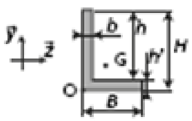
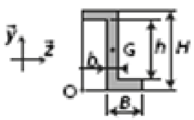
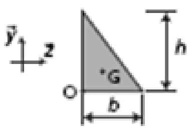
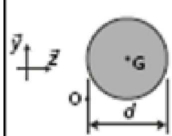
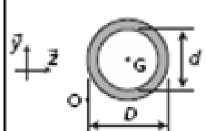
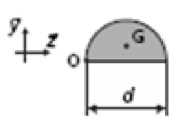
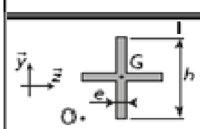
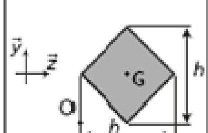
Coordonnées du centre de gravité de la surface (s) :

$$z_G^{(s)}=\frac{S_{oz}^{(s1)}+S_{oz}^{(s2)}-S_{oz}^{(s3)}}{S^{(s)}}=\frac{h^2+be-e^2}{2(h+b-e)}$$

$$y_G^{(s)}=\frac{S_{oy}^{(s1)}+S_{oy}^{(s2)}-S_{oy}^{(s3)}}{S^{(s)}}=\frac{he+b^2-e^2}{2(h+b-e)}$$

7. Caractéristiques des principales sections

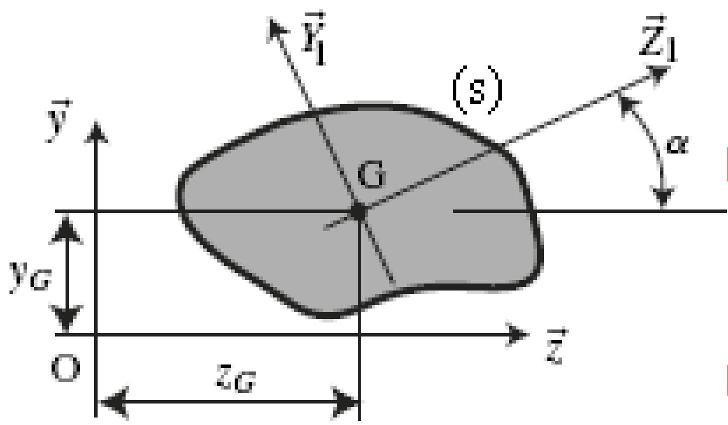
Géométrie	Section	Centre de gravité	Moment statique	Moment quadratique
	$S = a^2$	$z_G = \frac{a}{2}$ $y_G = \frac{a}{2}$	$S_{Oz} = \frac{a^3}{2}$ $S_{Oy} = \frac{a^3}{2}$	$I_{Gz} = \frac{a^4}{12}$ $I_{Gy} = \frac{a^4}{12}$
	$S = A^2 - a^2$	$z_G = \frac{A}{2}$ $y_G = \frac{A}{2}$	$S_{Oz} = \frac{A^3 - a^2 A}{2}$ $S_{Oy} = \frac{A^3 - a^2 A}{12}$	$I_{Gz} = \frac{A^4 - a^4}{12}$ $I_{Gy} = \frac{A^4 - a^4}{12}$
	$S = bh$	$z_G = \frac{b}{2}$ $y_G = \frac{h}{2}$	$S_{Oz} = \frac{bh^2}{2}$ $S_{Oy} = \frac{b^2 h}{2}$	$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{Gy} = \frac{hb^3}{12}$
	$S = BH - bh$	$z_G = \frac{B}{2}$ $y_G = \frac{H}{2}$	$S_{Oz} = \frac{BH^2 - bhH}{2}$ $S_{Oy} = \frac{B^2 H - bhB}{2}$	$I_{Gz} = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $I_{Gy} = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$
	$S = BH - h(B-b)$	$z_G = \frac{B}{2}$ $y_G = \frac{H}{2}$	$S_{Oz} = \frac{BH^2 - hH(B-b)}{2}$ $S_{Oy} = \frac{B^2 H - hB(B-b)}{2}$	$I_{Gz} = \frac{BH^3 - h^3(B-b)}{12}$ $I_{Gy} = \frac{B^3 H - h(B^3 - b^3)}{12}$
	$S = BH - h(B-b)$	$z_G = \frac{B}{2}$ $y_G = \frac{H_{Oz}}{S}$	$S_{Oz} = \frac{BH^2 - h^2(B-b)}{2}$ $S_{Oy} = \frac{B^2 H - hB(B-b)}{2}$	$I_{Gz} = \frac{BH^3 - h^3(B-b)}{3} - y_G^2 S$ $I_{Gy} = \frac{B^3 H - h(B^3 - b^3)}{12}$
	$S = \frac{\pi r^2}{4}$	$z_G = \frac{4r}{3\pi}$ $y_G = \frac{4r}{3\pi}$	$S_{Oz} = \frac{r^3}{3}$ $S_{Oy} = \frac{r^3}{3}$	$I_{Gz} = \frac{r^4}{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$ $I_{Gy} = \frac{r^4}{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$
	$S = \frac{\pi ab}{4}$	$z_G = \frac{a}{2}$ $y_G = \frac{b}{2}$	$S_{Oz} = \frac{\pi ab^2}{8}$ $S_{Oy} = \frac{\pi a^2 b}{8}$	$I_{Gz} = \frac{\pi ab^3}{64}$ $I_{Gy} = \frac{\pi a^3 b}{64}$

Géométrie	Section	Centre de gravité	Moment statique	Moment quadratique
	$S = BH - h(B-b)$	$z_G = \frac{H_{Oy}}{S}$ $y_G = \frac{H_{Oz}}{S}$	$S_{Oz} = \frac{(B-b)h'^2 + bH^2}{2}$ $S_{Oy} = \frac{B^2h' + hb^2}{2}$	$I_{Gz} = \frac{(B-b)h'^3 + bH^3}{3} - y_G^2 S$ $I_{Gy} = \frac{h'B^3 + hb^3}{3} - z_G^2 S$
	$S = BH - h(B-b)$	$z_G = B - \frac{b}{2}$ $y_G = \frac{H}{2}$	$S_{Oz} = \frac{BH^2 - hH(B-b)}{2}$ $S_{Oy} = z_G S$	$I_{Gz} = \frac{BH^3 - h^3(B-b)}{12}$ $I_{Gy} = \frac{2hb^3 + (H-h)(2B-b)^3}{24}$
	$S = \frac{1}{2}bh$	$z_G = \frac{b}{3}$ $y_G = \frac{h}{3}$	$S_{Oz} = \frac{bh^2}{6}$ $S_{Oy} = \frac{b^2h}{6}$	$I_{Gz} = \frac{bh^3}{36}$ $I_{Gy} = \frac{hb^3}{36}$
	$S = \frac{\pi d^2}{4}$	$z_G = \frac{d}{2}$ $y_G = \frac{d}{2}$	$S_{Oz} = \frac{\pi d^3}{8}$ $S_{Oy} = \frac{\pi d^3}{8}$	$I_{Gz} = \frac{\pi D^4}{64}$ $I_{Gy} = \frac{\pi D^4}{64}$
	$S = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$	$z_G = \frac{D}{2}$ $y_G = \frac{D}{2}$	$S_{Oz} = \frac{\pi(D^3 - d^2D)}{8}$ $S_{Oy} = \frac{\pi(D^3 - d^2D)}{8}$	$I_{Gz} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$ $I_{Gy} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$
	$S = \frac{\pi d^2}{8}$	$z_G = \frac{d}{2}$ $y_G = \frac{2d}{3\pi}$	$S_{Oz} = \frac{d^3}{12}$ $S_{Oy} = \frac{\pi d^3}{16}$	$I_{Gz} = \frac{d^4}{16}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$ $I_{Gy} = \frac{\pi d^4}{128}$
	$S = 2eh - e^2$	$z_G = \frac{h}{2}$ $y_G = \frac{h}{2}$	$S_{Oz} = \frac{2eh^2 - e^2h}{2}$ $S_{Oy} = \frac{2eh^2 - e^2h}{2}$	$I_{Gz} = \frac{eh^3 + e^3h - e^4}{12}$ $I_{Gy} = \frac{eh^3 + e^3h - e^4}{12}$
	$S = \frac{h^2}{2}$	$z_G = \frac{h}{2}$ $y_G = \frac{h}{2}$	$S_{Oz} = \frac{h^3}{4}$ $S_{Oy} = \frac{h^3}{4}$	$I_{Gz} = \frac{h^4}{48}$ $I_{Gy} = \frac{h^4}{48}$

8. Changement de repère

a) Repère orienté par un angle α

On considère le repère (Oz_1, Oy_1) orienté par un angle **α** par rapport au repère (Oz, Oy).



Les coordonnées d'un point dans ce nouveau repère sont :

$$z_1 = \cos(\alpha)\, z + \sin(\alpha)\, y$$

$$y_1 = -\sin(\alpha)\, z + \cos(\alpha)\, y$$

Les moments d'inertie d'une section dans le nouveau repère s'écrivent :

$$I_{Gz_1} = \frac{1}{2}(I_{Gz} + I_{Gy}) + \frac{1}{2}(I_{Gz} - I_{Gy})\cos(2\alpha) + I_{Gyz}\sin(2\alpha)$$

$$I_{Gy_1} = \frac{1}{2}(I_{Gz} + I_{Gy}) + \frac{1}{2}(I_{Gz} - I_{Gy})\cos(2\alpha) - I_{Gyz}\sin(2\alpha)$$

Le produit d'inertie est :

$$I_{Gy_1z_1} = \frac{1}{2}(I_{Gz} - I_{Gy})\sin(2\alpha) + I_{Gyz}\cos(2\alpha)$$

b) Repère principal d'inertie

L'angle **α** entre le repère principal d'inertie Oz_1 et Oy_1 et le repère (Oz, Oy) est :

$$tg(2\boldsymbol{\alpha}) = \frac{2I_{Gyz}}{I_{Gy} - I_{Gz}}$$

Les moments d'inertie principaux, respectivement maximal et minimal, sont :

$$I_{max} = \frac{1}{2}\left(I_{Gy} + \sqrt{(I_{Gz} - I_{Gy})^2 + 4I_{Gyz}}\right)$$

$$I_{min} = \frac{1}{2}\left(I_{Gz} - \sqrt{(I_{Gz} - I_{Gy})^2 + 4I_{Gyz}}\right)$$