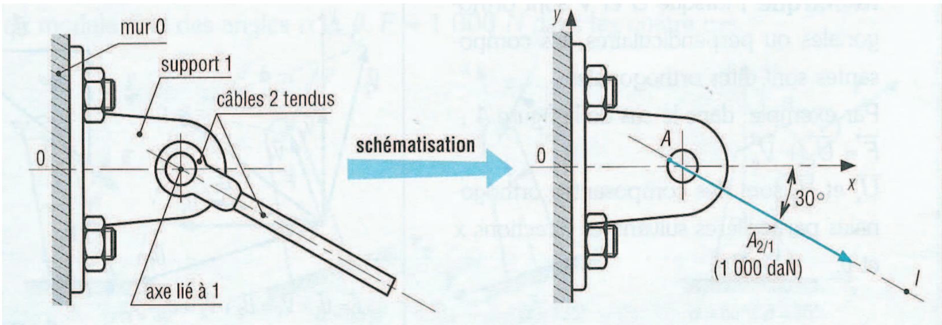
CHAPITRE II : STATIQUE

A- Généralités :

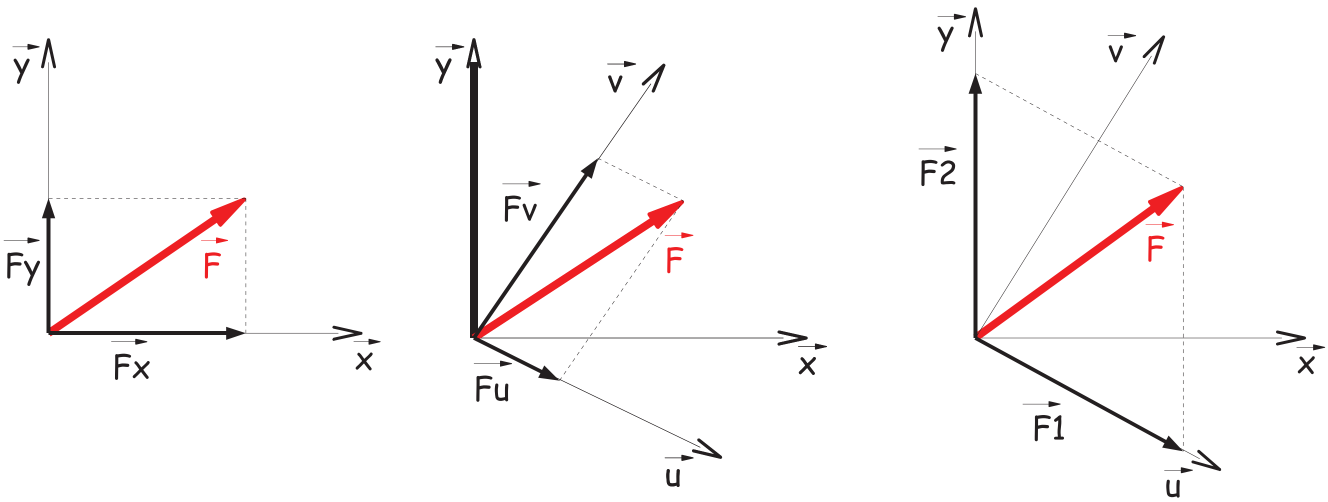
I. NOTION DE FORCE :

En mécanique, les forces sont utilisées pour modéliser des actions mécaniques diverses (actions de contact, poids, attraction magnétique, effort …).
Les forces sont représentées par des *vecteurs-forces*, qui possèdent les propriétés générales des vecteurs.
Un *vecteur-force* est défini par:
- une intensité (unité, le Newton)
- une direction
- un sens
- un point d'application (ou un point du support).



1. Composantes d'une force :

Une force $\vec{F}$ peut toujours être remplacée par deux forces (ou composantes) agissant au même point.
Il existe une infinité de solutions possibles.



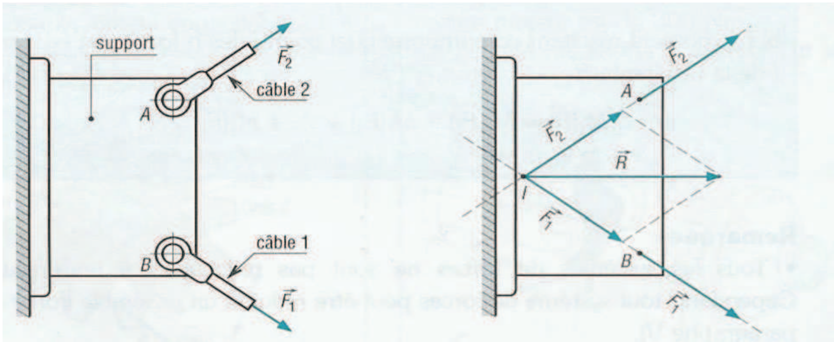
$$\vec{F} = Fx.\vec{x} + Fy.\vec{y} \qquad \vec{F} = Fu.\vec{u} + Fv.\vec{v} \qquad \vec{F} = F1.\vec{u} + F2.\vec{v}$$

2. Résultante de deux forces :

On peut toujours remplacer deux forces par leur *résultante* : $\vec{R} = \vec{F1} + \vec{F2}$

C'est un vecteur-force, qui se définit par :
- une direction
- un sens
- une intensité
- un point d'application: **c'est le point de concours des supports de** $\vec{F1}$ **et** $\vec{F2}$

Attention!
La résultante n'est pas la modélisation d'une action mécanique, mais un vecteur calculé permettant de simplifier l'étude.

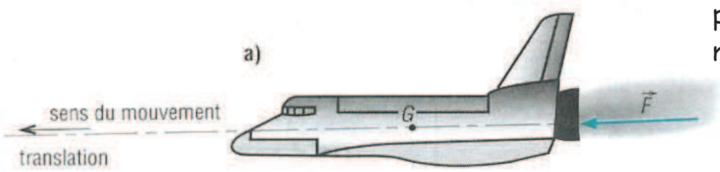


II. NOTION DE MOMENTS ET DE COUPLES :

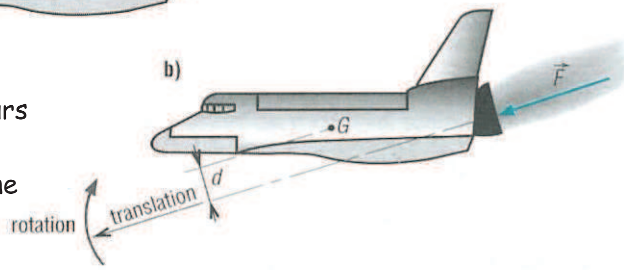
Les effets d'une force sur un solide dépendent de la position de la force par rapport au corps. Ils engendrent des translations ou des rotations.
Pour traduire ces phénomènes, on fait appel à la notion de *moment*.

Exemple :

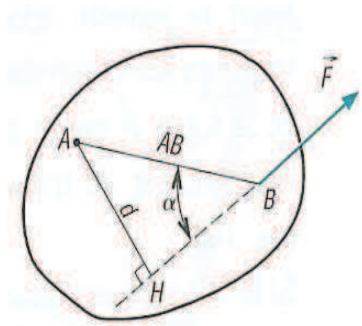
a) La direction de la poussée des moteurs passe par le centre de gravité, le mouvement est une translation rectiligne.



b) La direction de la poussée des moteurs ne passe pas par le centre de gravité, le mouvement est une translation rectiligne **et** une rotation.



1. Moment d'une force par rapport à un point :



Soit une force F appliquée au point B.
La distance entre le support de F et le point A est d = AH.
Le moment de ce vecteur au point A est :

$$MA(\vec{F}) = F.AB.(\sin\alpha) = F.d$$

Unité : N.m (Newton mètre)

Remarque :

En fonction du repère choisi, si l'effort tend à faire tourner dans le sens trigonométrique, le moment sera de signe positif.

Si l'effort tend à faire tourner dans le sens horaire, le moment sera de signe négatif.

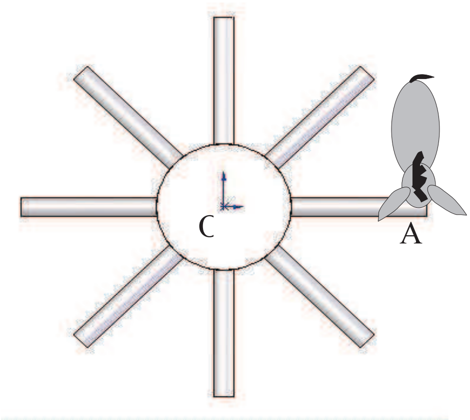
Exemple :

Ce petit âne vit en Afrique, où il est attelé quotidiennement à la barre d'une roue qui permet d'actionner un puits.

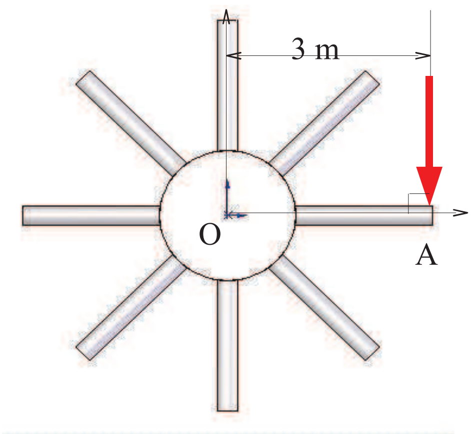
Afin de remonter l'eau, il faut produire un moment M_O = 1 500 Nm.
La longueur du levier OA est de 3 m.
Pour les différentes positions proposées, calculer l'effort que doit fournir l'âne.

Cas n°1 :

L'âne est placé perpendiculairement au levier.



Modélisation :

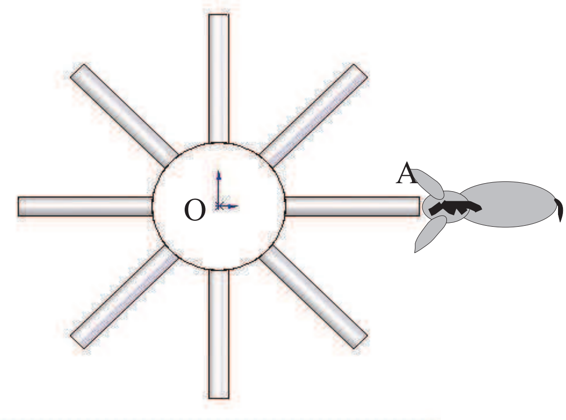


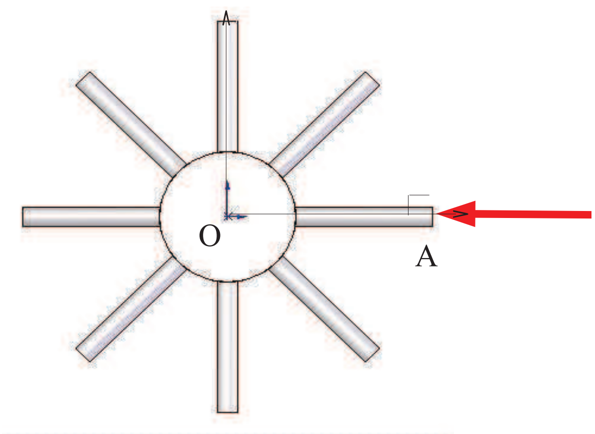
$MO(\vec{F}) = F.OA.\sin 90° = F.d$ donc F = 1500 / 3 = **500 N** **; la rotation sera dans le sens horaire**

Cas n°2 :

L'âne est placé dans le prolongement du levier
(je sais, c'est stupide , mais c'est pour l'exemple..)

Modélisation :

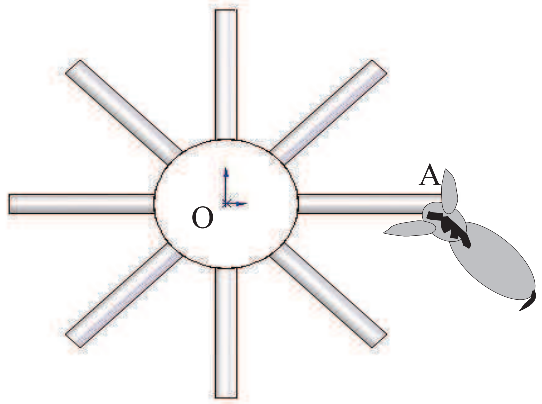




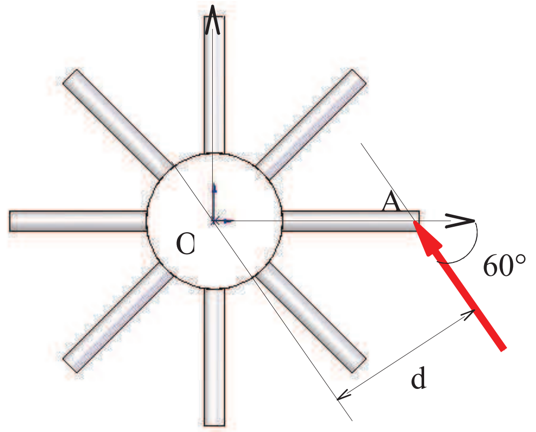
$MO(\vec{F}) = F.OA.\sin 0° = 0$

La direction de l'action exercée passe par le point O. Donc , quelque soit l'effort fourni par l'âne, le moment sera nul, la roue ne tournera pas....

Cas n°3 :
L'âne est placé selon un angle de 60° par rapport au levier.



Modélisation :



$$MO(\vec{F}) = F.OA.\sin 60° = F.d$$

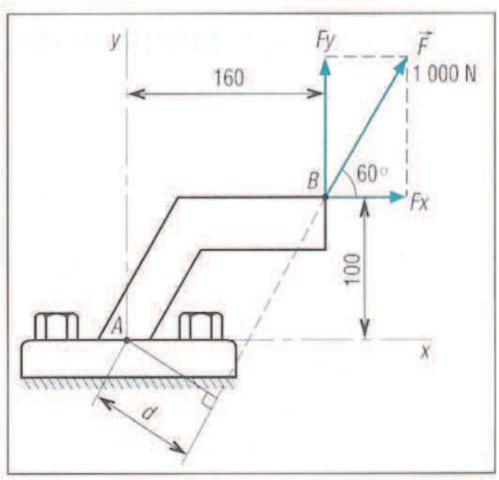
donc F = 1500 / (3 x sin60°) = **577,35 N** , **la roue tournera dans le sens trigonométrique.**
Une partie de l'effort exercé par l'âne est perdue.

2. Théorème de Varignon :

Soit un vecteur $\vec{F} = \vec{U} + \vec{V}$ appliqué au point B. Le moment de la force $\vec{F}$ au point A est égal à la somme des moments au point A des composantes de $\vec{F}$.

$$\boxed{MA(\vec{F}) = MA(\vec{U}) + MA(\vec{V})}$$

Exemple :
Calculer le moment en A de la force $\vec{F}$.



$$MA(\vec{F}) = MA(\vec{Fx}) + MA(\vec{Fy})$$

$$MA(\vec{F}) = (Fy.160) - (Fx.100)$$

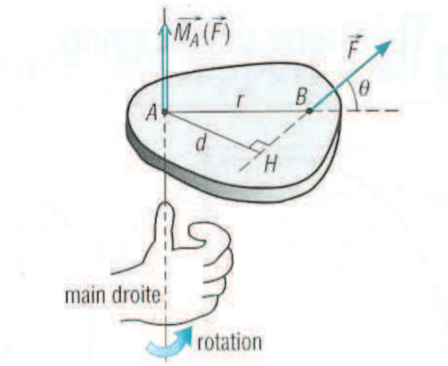
= (1000. sin60°. 160) – (1000.cos60°.100)
= 88564 mNm
= **88,6 Nm**

3. Vecteur – moment :

Le moment d'une force peut être modélisée sous forme vectorielle : $\overrightarrow{MA}(\vec{F})$

- une direction : axe perpendiculaire au plan de $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$.
- sens : selon le signe (voir ci-dessus).
- Norme :

$$\overrightarrow{MA}(\vec{F})=\overrightarrow{AB}\wedge\vec{F}$$



Propriété :

$$\boxed{\overrightarrow{MO}(\vec{F})=\overrightarrow{MA}(\vec{F})+\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}}$$

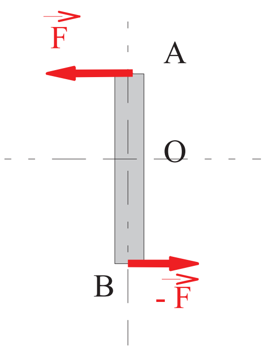
4. Moment résultant de plusieurs forces :

Le **moment résultant** $\overrightarrow{MA}$ en un point A de n forces $\vec{F1}, \vec{F2}, ... \vec{Fn}$ est égal à la somme des moments en A de chacune des forces :

$$\boxed{\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MA}(\vec{F1})+\overrightarrow{MA}(\vec{F2}).....+\overrightarrow{MA}(\vec{Fn})}$$

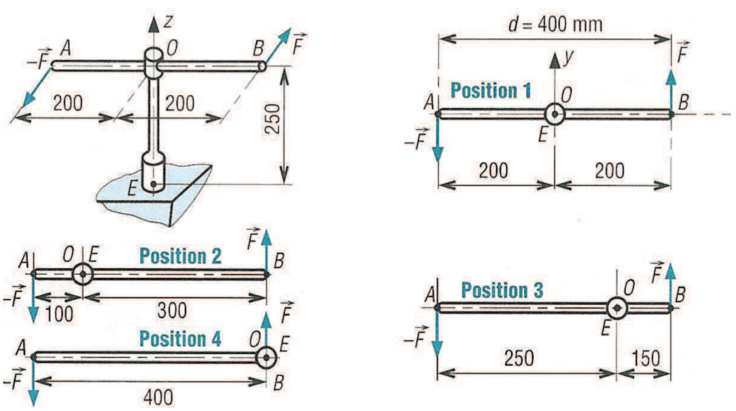
5. Notion de couple :

Pour faire tourner une clé dans une serrure, un effort simple n'est pas adapté. On applique alors un couple. Le moment engendré par deux forces égales et opposées ayant des lignes d'action parallèles constitue un couple : OA = OB = a et AB = d.



$$\boxed{\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MO}(\vec{F})+\overrightarrow{MO}(\vec{F})=2.(F.a)=F.d}$$

Exemple : Clé à bougie



Quelle que soit la position de la tige de manoeuvre, le couple exercé par la clé sur l'écrou est identique :

M O = 0,4 . F = 40 Nm.

IV. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE :

Un solide indéformable (S) en équilibre sous l'action de n actions extérieures reste en équilibre si :

La somme vectorielle des forces extérieures est nulle.
ET la somme vectorielle des moments en un point quelconque est nulle.

$$\sum \vec{Fext} = \vec{F1} + \vec{F2} + ... + \vec{Fn}$$

ET

$$\sum \overrightarrow{MO}(Fext) = \overrightarrow{MO}(F1) + \overrightarrow{MO}(F2) + ... + \overrightarrow{MO}(Fn)$$

Ce principe peut s'exprimer également ainsi :

Le torseur des actions extérieures est égal au torseur nul. Le torseur des actions extérieures est la somme de tous les torseurs d'actions appliquées aux solides S.

$$\left\{ T\, \overrightarrow{Fext} / S \right\}_A = \left\{ \vec{O} \right\}_A$$

Le choix de la méthode de résolution dépend du type de problème posé :

Problème plan :
Le mécanisme comporte un plan de symétrie et le « chargement » (position et intensité des forces) est entièrement situé dans ce plan, ou dans des plans parallèles et de façon symétrique.

Problème spatial :
Le mécanisme ne possède pas de plan de symétrie, ou le chargement s'effectue dans les trois directions.

V. RESOLUTION D'UN PROBLEME DE STATIQUE DANS L'ESPACE :

On utilise **les torseurs** comme outil de résolution.

Les différentes étapes sont :

- **Isoler le solide** (ou les solides) et le représenter sous forme schématisée.
  Modéliser les actions exercées par le milieu extérieur sur le solide isolé.
- **Faire le bilan** des torseurs d'action extérieures, c'est à dire écrire chaque torseur en son point d'application.
- **Choisir (judicieusement ..) un point de calcul**, et exprimer tous les torseurs en ce même point de réduction. On peut maintenant additionner ces torseurs.
- **Vérifier** que le nombre d'inconnue est inférieur ou égal au nombre d'équation (6 équations maxi)
  Si ce n'est pas le cas, rechercher les équations supplémentaires.
- **Appliquer le Principe Fondamental de la Statique :**
- Résoudre les équations qui en découlent.
- **Résultats :** Écrire chaque torseur en son point d'application.

III) Réduction et équilibre :

3.1) Réduction :

3.1.1) Définition :

La réduction d'un système de forces consiste à le remplacer par un système statiquement équivalent, pour simplifier le problème.

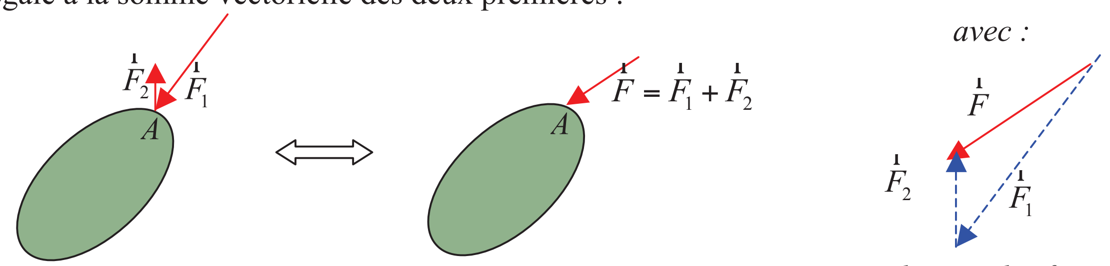
✍ *Remarque : statiquement équivalent, c'est-à-dire qui produit les même effets sur la structure en STATIQUE, mais il peut être différent en MECANIQUE DES STRUCTURES.*

En définition :
Soit F_R la résultante des forces et M_R le moment résultant

$$F_R = \sum Fi$$
$$M_R = \sum Fi \times d + \sum M_i$$

3.1.2) Méthode graphique :

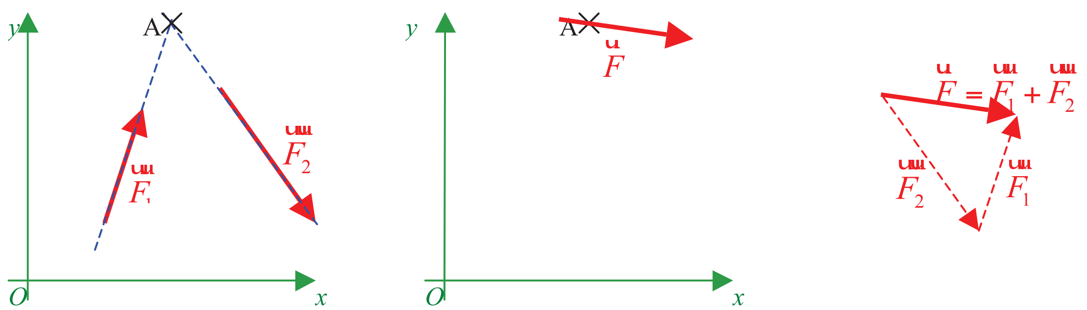
On peut ainsi réduire deux forces appliquées en un point d'une structure par une force égale à la somme vectorielle des deux premières :



Structure – schéma 1 *Structure – schéma 2* *Polygone des forces*

✍ *Remarque 1 : Nous venons de réaliser de manière graphique une réduction. Dans le cas de plus de 2 forces, on met aussi bout à bout les vecteurs pour trouver la résultante (relation de Chales).*

✍ *Remarque 2 : Si ces forces ne sont pas appliquées au même point, la droite d'action de la résultante passe par l'intersection des droites d'action des deux forces. Le vecteur résultant est un vecteur libre (qui n'est pas attaché à un point, mais se ballade sur la droite d'action) :*



Structure – schéma 1 *Structure – schéma 2* *Polygone des forces*

3.1.3) Méthode analytique – réduction en un point :

De manière analytique, il est possible de remplacer un système de forces en un autre (généralement une force et un moment).

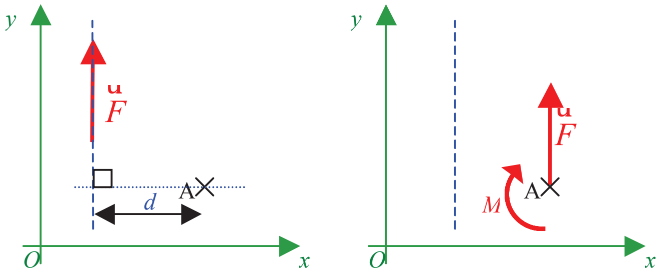
- *Réduction d'une force :*

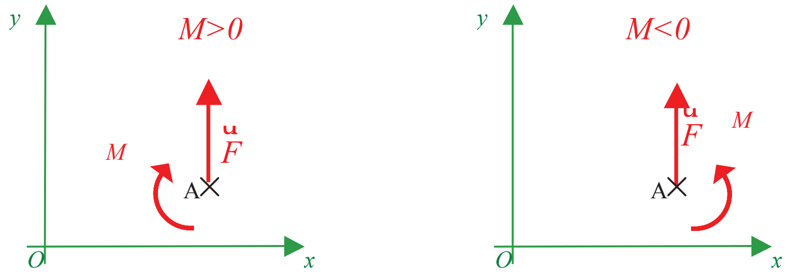
On veut réduire une force en un point A.

La force sera donc remplacée par une autre force, et un moment tel que :

$M = F \times d$

(avec le signe : Très important – Schéma expliquant si le Moment est positif ou négatif))



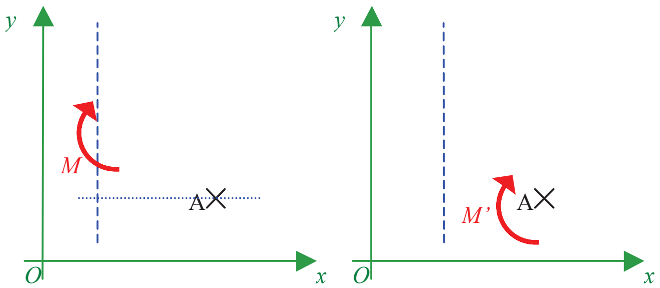


- *Réduction d'un moment :*

On veut réduire un moment M en un point A.

L'intensité du moment ne changera pas :

$M' = M$

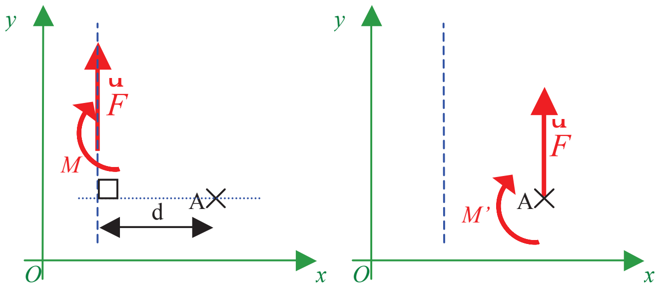


- *Réduction d'une force et d'un moment :*

On veut réduire un système (force + moment) en un point A.

La force sera donc remplacée par une autre force, et un moment tel que :

$M' = F \times d + M$



3.2) Définition de l'équilibre :

Un système de forces (et/ou de moments) est dit en équilibre si, appliqué à un solide, il ne modifie pas l'état de repos (en statique) de ce solide.

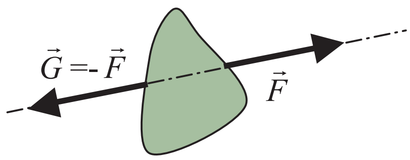
Pour étudier l'état d'équilibre du solide, il est nécessaire de *l'isoler*, c'est-à-dire de le considérer comme dissocié de tout autre élément ne faisant pas partie de la structure étudiée (le sol par exemple pour un bâtiment ; recenser les efforts qui agissent sur le solide).

En génie civil, toutes les structures doivent être en équilibre (on veut qu'elles soient et restent immobiles).

3.3) Equilibre d'un système simple :

Pour qu'un élément soumis à deux forces soit en équilibre, il faut que ces deux forces soient opposées (et appliquées au même solide), c'est-à-dire :

- de même intensité ;
- de même droite d'action ;
- de sens opposés.



✍ *Remarque : En effet, si l'une de ces conditions n'est pas respectée, un moment ou une force résiduelle existe, donc un déplacement ou une rotation aussi. L'équilibre n'est alors pas obtenu.*

3.4) Equilibre – Principe fondamental de la statique : Théorème :

Un système de forces d'un solide isolé est en équilibre si ses résultantes sont nulles. En effet, si la force résultante n'est pas nulle, une translation se produit.
De même, si un moment résultant subsiste, le solide tournera.

Par conséquent, on peut écrire l'équilibre de manière analytique :

Pour les problèmes 2D	*Pour les problèmes 3D (3éme loi de Newton)*
$\sum_{i=1}^{n} F_i x = 0$	$\sum_{i=1}^{n} F_i x = 0$
La somme des forces et nulle	$\sum_{i=1}^{n} F_i y = 0$
$\sum_{i=1}^{n} F_i y = 0$	$\sum_{i=1}^{n} F_i z = 0$
	$\sum_{i=1}^{n} M_i x = 0$
$\sum_{i=1}^{n} M_i z = 0$ en un point bien précis	$\sum_{i=1}^{n} M_i y = 0$
	$\sum_{i=1}^{n} M_i z = 0$

✍ *Remarque : si l'on recherche le système de forces à appliquer en A de manière à équilibrer le solide S, il suffit de réduire en A les forces que ce solide subit. Le système à appliquer est égal au système inverse de la réduction.*