Université Ferhat Abbas, Sétif 1

1^{ére}Année Aménagement **Mathématique I 2020/2021**

Série d'exercices 03

Exercice 01 :
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices $A + B$, $A - B$, $2A$, $2A - 3B$. De même pour les matrices C et D (i,e. : $C + D$, $C - D$, $2C$, $2C - 3D$).
2. Calculer si possible, les matrices AB, BA, BC, CB, CD, DC.
3. Calculer les matrices A^T, B^T, C^T, D^T.
4. Calculer tr(A), tr(B).
5. Calculer $rg(A), rg(B), rg(C), rg(D), rg(AB)$.

Exercice 02 :
Soient les matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les déterminants suivants : $det(A)$, $det(B)$, $det(C)$.
2. Les matrices A, B, C, sont-elles inversibles ?.
3. Les matrices A^T, AB, sont-elles inversibles?.
4. Calculer, lorsqu'ils existent les inverses A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, $(A^T)^{-1}$ et $(AB)^{-1}$.

Solution de la série

Solution d'exercice 01 :

- **La taille des matrices :**

$$A \in \mathcal{M}_{3,3}, B \in \mathcal{M}_{3,3}, C \in \mathcal{M}_{3,2}, D \in \mathcal{M}_{3,2}.$$

- **Dimension des matrices :**

Dimension de la matrice A est : $3 \times 3 = 9$.
Dimension de la matrice B est : $3 \times 3 = 9$.
Dimension de la matrice C est : $3 \times 2 = 6$.
Dimension de la matrice D est : $3 \times 2 = 6$.

1) Remarque : on peut faire l'addition et la soustraction de deux matrices si ces deux matrices ont le même nombre de lignes et nombre de colonnes).

- $$A+B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -1+3 & 2+5 \\ 3+1 & 1+2 & -1+4 \\ 4+1 & 2+1 & 1+3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- $$A-B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -1-3 & 2-5 \\ 3-1 & 1-2 & -1-4 \\ 4-1 & 2-1 & 1-3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- $$2A = 2. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $$3B = 3. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 3 & 6 & 12 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

- $$2A-3B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 3 & 6 & 12 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 & -11 \\ 3 & -4 & -14 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

- $C+D=\begin{pmatrix}2&3\\0&4\\1&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\\2&7\end{pmatrix}.$

- $C-D=\begin{pmatrix}2&3\\0&4\\1&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\-1&6\\0&7\end{pmatrix}.$

- $2C=2.\begin{pmatrix}2&3\\0&4\\1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\0&8\\2&14\end{pmatrix}.$

- $2C-3D=\begin{pmatrix}4&6\\0&8\\2&14\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\0&8\\2&14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-3\\3&-6\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\-3&14\\-1&14\end{pmatrix}.$

2)

- $AB=\begin{pmatrix}2&-1&2\\3&1&-1\\4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&5\\1&2&4\\1&1&3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}(2\times1)+(-1\times1)+(2\times1)&(2\times3)+(-1\times2)+(2\times1)&(2\times5)+(-1\times4)+(2\times3)\\(3\times1)+(1\times1)+(-1\times1)&(3\times1)+(1\times1)+(-1\times1)&(3\times1)+(1\times1)+(-1\times1)\\(4\times1)+(2\times1)+(1\times1)&(4\times1)+(2\times1)+(1\times1)&(4\times1)+(2\times1)+(1\times1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&6&12\\3&10&16\\7&17&31\end{pmatrix}.$$

- $BA=\begin{pmatrix}1&3&5\\1&2&4\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&2\\3&1&-1\\4&2&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}(1\times2)+(3\times3)+(5\times4)&(1\times-1)+(3\times1)+(5\times2)&(1\times2)+(3\times-1)+(5\times1)\\(1\times2)+(2\times3)+(4\times4)&(1\times-1)+(2\times1)+(4\times2)&(1\times2)+(2\times-1)+(4\times1)\\(1\times2)+(1\times3)+(3\times4)&(1\times-1)+(1\times1)+(3\times2)&(1\times2)+(1\times-1)+(3\times1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}31&12&4\\24&9&4\\17&6&4\end{pmatrix}.$$

- $BC=\begin{pmatrix}1&3&5\\1&2&4\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\0&4\\1&7\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (1\times 2)+(3\times 0)+(5\times 1) & (1\times 3)+(3\times 4)+(5\times 7) \\ (1\times 2)+(2\times 0)+(4\times 1) & (1\times 3)+(2\times 4)+(4\times 7) \\ (1\times 2)+(1\times 0)+(3\times 1) & (1\times 3)+(1\times 4)+(3\times 7) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 50 \\ 6 & 39 \\ 5 & 28 \end{pmatrix}.$$

- CB est impossible à calculer, car le nombre de colonnes de $C = 2 \neq$ le nombre de lignes de $B = 3$ $(2 \neq 3)$.
- CD est impossible à calculer, car le nombre de colonnes de $C = 2 \neq$ le nombre de lignes de $D = 3$ $(2 \neq 3)$.
- DC est impossible à calculer, car le nombre de colonnes de $D = 2 \neq$ le nombre de lignes de $C = 3$ $(2 \neq 3)$.

3)

- On a $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- On a $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
- On a $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $C^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.
- On a $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

4)

- La trace (tr) d'une matrice est la somme des éléments diagonaux.
- $tr(A) = 2 + 1 + 1 = 4$.
- $tr(B) = 1 + 2 + 3 = 6$.
- On ne peut pas calculer $tr(C)$ et $tr(D)$ car les matrices C et D ne sont pas carrées.

5) Le rang d'une matrice : c'est le nombre maximum des vecteurs colonnes ou des vecteurs lignes qui sont linéairement indépendants (libres), donc si on échelonne les vecteurs colonnes de la matrice alors le rang de cette matrice est le nombre de vecteurs non nuls trouvés par échelonnement.

i) On a :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (-1, 1, 2)$, $v_3 = (2, -1, 1)$.
On voir si les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont libres.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

$\lambda_1(2, 3, 4) + \lambda_2(-1, 1, 2) + \lambda_3(2, -1, 1) = (0, 0, 0)$
$(2\lambda_1, 3\lambda_1, 4\lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2, 2\lambda_2) + (2\lambda_3, -\lambda_3, \lambda_3) = (0, 0, 0)$
$(2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3, 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \quad ...(1) \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \quad ...(2) \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \quad ...(3) \end{cases}$$

De (1) on trouve :

$$\lambda_2 \quad = 2\lambda_1 + 2\lambda_3 \quad ...(4)$$

On remplace dans (2) on trouve : $3\lambda_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_3 - \lambda_3 = 0 \Longrightarrow 5\lambda_1 + \lambda_3 = 0$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_3 \quad = -5\lambda_1 \quad ...(5)$$

On remplace (4) et (5) dans (3), on trouve
$4\lambda_1 + 2(2\lambda_1 + 2(-5\lambda_1)) + (-5\lambda_1) = 0 \Longrightarrow 4\lambda_1 - 16\lambda_1 - 5\lambda_1 = 0 \Longrightarrow -17\lambda_1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$.
En remplaçant dans (4) et (5), on trouve :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont libres.
Alors $rg(A) = 3$ (parce qu'il ya trois vecteurs libres).

ii) On a :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a : $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (3, 2, 1)$, $v_3 = (5, 4, 3)$
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(3,2,1)+\lambda_3(5,4,3)=(0,0,0)$
$(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_1)+(3\lambda_2,2\lambda_2,\lambda_2)+(5\lambda_3,4\lambda_3,3\lambda_3)=(0,0,0)$
$(\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3,\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3)=(0,0,0)$

$$\begin{cases} \lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3 & =0 \quad ...(1) \\ \lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3 & =0 \quad ...(2) \\ \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3 & =0 \quad ...(3) \end{cases}$$

De (1) on trouve :

$$\lambda_1 \quad = -3\lambda_2-5\lambda_3 \quad ...(4)$$

On remplace dans (2) on trouve : $-3\lambda_2-5\lambda_3+2\lambda_2+4\lambda_3=0 \Longrightarrow -\lambda_2-\lambda_3=0$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_2 \quad = -\lambda_3 \quad ...(5)$$

On remplace (4) et (5) dans (3), on trouve
$3\lambda_3-5\lambda_3-\lambda_3+3\lambda_3=0 \Longrightarrow 0=0.$

Donc les vecteurs v_1, v_2, v_3 ne sont pas libres, alors on élimine un vecteur quelconque par exemple v_3, donc on vérifie les vecteurs v_1 et v_2 est ce que libres :

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2=(0,0,0)$$

$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(3,2,1)=(0,0,0)$
$(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_1)+(3\lambda_2,2\lambda_2,\lambda_2)=(0,0,0)$
$(\lambda_1+3\lambda_2,\lambda_1+2\lambda_2,\lambda_1+\lambda_2)=(0,0,0)$

$$\begin{cases} \lambda_1+3\lambda_2 & =0 \quad ...(1) \\ \lambda_1+2\lambda_2 & =0 \quad ...(2) \\ \lambda_1+\lambda_2 & =0 \quad ...(3) \end{cases}$$

De (1) on a : $\lambda_1=-3\lambda_2$, on remplaçant dans (2) on trouve : $-3\lambda_2+2\lambda_2=0 \Longrightarrow \lambda_2=0$.

Donc :

$$\lambda_1=\lambda_2=0.$$

Par suite on a v_1, v_2 sont libres donc : $rg(B)=2$.

iii) On a :

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

De même manière on trouve que les vecteurs $u_1=(2,0,1)$ et $u_2=(3,4,7)$ sont libres.

Par suite on a $rg(C) = 2$.

On a :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De même manière on trouve que les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$ et $u_2 = (-1, -2, 0)$ sont libres.

Par suite on a $rg(D) = 2$.

Solution d'exercice 02 :

1)

$$det(A) = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} + & - \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} + & - \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} + & - \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= +2((-1 \times 3) - (4 \times 2)) - 5((3 \times 3) - (4 \times 1)) + 7((3 \times 2) - (-1 \times 1))$$

$$= 2(-11) - 5(5) + 7(7) = 2$$

Alors :

$$det(A) = 2.$$

$$det(B) = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} + & - \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} + & - \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} + & - \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= +1((2 \times 3) - (4 \times 1)) - 3((1 \times 3) - (4 \times 1)) + 5((1 \times 1) - (2 \times 1))$

$= 1(2) - 3(-1) + 5(-1) = 0$.

Alors :

$$det(B) = 0.$$

On a

$det(C) = \begin{vmatrix} + & - \\ 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (7 \times 1) - (3 \times 4) = 7 - 12 = -5$.

Alors :

$$det(C) = -5.$$

2) Une matrice carrée est inversible $\Longleftrightarrow$ son déterminant est non nul.

- On a $det(A) = 2 \neq 0$ donc la matrice A est inversible.
- On a $det(B) = 0$ donc la matrice B n'est pas inversible.
- On a $det(C) = -5 \neq 0$ donc la matrice C est inversible.

3) $detA^T = detA = 2 \neq 0$ donc la matrice A^T est inversible.

$detAB = detA \times detB = 2 \times 0 = 0$,donc la matrice AB n'est pas inversible.

4) La matrice A est inversible donc la matrice A^{-1} existe.

La matrice B n'est pas inversible donc la matrice B^{-1} n'existe pas.

La matrice C est inversible donc la matrice C^{-1} existe.

La matrice A^T est inversible donc la matrice $(A^T)^{-1}$ existe.

La matrice AB n'est pas inversible donc la matrice $(AB)^{-1}$ n'existe pas.

Le calcul :
on sait que :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(Com(A))^T.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(Com(A))^T.$$

- On calcul $Com(A)$:

$$Com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Com(A) = \begin{pmatrix} -11 & -5 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 27 & 13 & -17 \end{pmatrix}, \text{ et } (Com(A))^T = \begin{pmatrix} -11 & -1 & 27 \\ -5 & -1 & 13 \\ 7 & 1 & -17 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -1 & 27 \\ -5 & -1 & 13 \\ 7 & 1 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{27}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{13}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-17}{2} \end{pmatrix}$$

- $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

  $C^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

  $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} = \frac{1}{(7\times 1)-(3\times 1)}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

- on sait que :

$$(A^T)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(Com(A^T))^T.$$

$$(A^T)^{-1} = \frac{1}{2}(Com(A^T))^T.$$

- On calcul $Com(A^T)$:

$Com(A^T) = Com(A)^T = \begin{pmatrix} -11 & -1 & 27 \\ -5 & -1 & 13 \\ 7 & 1 & -17 \end{pmatrix}$, et $(Com(A^T))^T =$
$Com(A) = \begin{pmatrix} -11 & -5 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 27 & 13 & -17 \end{pmatrix}$

Finalement

$$(A^T)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -5 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 27 & 13 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{27}{2} & \frac{13}{2} & \frac{-17}{2} \end{pmatrix}.$$