Université Ferhat Abbas, Sétif 1

$1^{ére}$Année Aménagement **Mathématique I 2020/2021**

Série d'exercices 02

Exercice 01 :
On considere dans l'éspace véctoriel $\mathbb{R}^2$ les vecteurs : $t_1 = (1, 2)$, $t_2 = (-1, 0)$.

- Montrer que la famille des vecteurs $\{t_1, t_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

On considère dans l'éspace véctoriel $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$.

- Montrer que la famille des vecteurs $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

On considère dans l'éspace véctoriel $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, -1)$.

- Montrer que la famille des vecteurs $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 02 :
Dans L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous espace vectoriel

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\right\}$$

- Déterminer une base de F puis donner sa dimension.

Exercice 03 :
Dans L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ on considère le sous espace vectoriel

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$$

- Déterminer une base de F puis donner sa dimension .

Exercice 04 :
Les applications suivantes sont elles linéaires?

$$\begin{array}{llcl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f(x,y,z) & = & x+y+z \end{array}, \quad \begin{array}{llcl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & g(x,y) & = & (y,x,x-2y) \end{array}$$

Exercice 05 :
Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y + z, x + y + z, x)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker f$ (le noyau) et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 06 :
Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-2y+z)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Donner une base de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Solution de la série

Solution d'exercice 01 :

- Soient dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $t_1 = (1, 2), t_2 = (-1, 0)$,

On montre que $\{t_1, t_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (c'est à dire t_1, t_2 sont libres et aussi $\mathbb{R}^2 = vect(t_1, t_2)$), mais comme $dim\mathbb{R}^2 = 2$ =nombre des vecteurs,i.e, $\mathbb{R}^2 = vect(t_1, t_2)$,alors il suffit de montrer seulement que les vecteurs t_1, t_2 sont libres .

Soient $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$\Longleftrightarrow \lambda_1(1, 2) + \lambda_2(-1, 0) = (0, 0)$
$\Longleftrightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1) + (-\lambda_2, 0) = (0, 0).$
$\Longleftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + 0) = (0, 0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \quad ...(1) \\ 2\lambda_1 + 0 & = 0 \quad ...(2) \end{cases}$$

De (2) on a

$$2\lambda_1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$$

Puis en remplaçant cette valeure dans (1), on obtient

$$\lambda_2 = 0$$

Ceci signifie que les vecteurs t_1, t_2 sont libres alors $\{t_1, t_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

- Soient dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 1, 0)$

On montre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$(c'est à dire v_1, v_2, v_3 sont libres et aussi $\mathbb{R}^3 = vect(v_1, v_2, v_3)$), mais comme $dim\mathbb{R}^3 = 3$, alors il suffit de montrer seulement que les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont libres .

Soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_1 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

$\Longleftrightarrow \lambda_1(0, 1, 1) + \lambda_2(1, 0, 1) + (1, 1, 0) = (0, 0, 0)$
$\Longleftrightarrow (0, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 0, \lambda_2) + (\lambda_3, \lambda_3, 0) = (0, 0, 0).$
$\Longleftrightarrow (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \quad ...(1) \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = 0 \quad ...(2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \quad ...(3) \end{cases}$$

De (1) on a $\lambda_2 = -\lambda_3$ et de (2) on a $\lambda_1 = -\lambda_3$ puis en remplaçant ces deux valeures dans (3), on obtient $-2\lambda_3 = 0$ d'où

$$\lambda_3 = 0$$

et donc

$$\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 0.$$

Ceci signifie que les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont libres alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Soient dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (1, 0, -1)$,

On montre que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$(c'est à dire u_1, u_2, u_3 sont libres et aussi $\mathbb{R}^3 = vect(u_1, u_2, u_3)$), mais comme $dim\mathbb{R}^3 = 3$,alors il suffit de montrer seulement que les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont libres .

Soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_1 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

$\Longleftrightarrow \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(-1, 1, 0) + (1, 0, -1) = (0, 0, 0)$
$\Longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2, 0) + (\lambda_3, , 0, -\lambda_3) = (0, 0, 0).$
$\Longleftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_3) = (0, 0, 0)$

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 & ...(1) \\ \quad \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 & ...(2) \\ \quad \lambda_1 - \lambda_3 & = 0 & ...(3) \end{array}\right.$$

De (2) on a $\lambda_2 = -\lambda_1$ et de (3) on a $\lambda_3 = \lambda_1$ puis en remplaçant ces deux valeures dans (1), on obtient $\lambda_1 - (-\lambda_1) + \lambda_1 = 0$ d'où $3\lambda_1 = 0$ et donc

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_3 = 0$$

Ceci signifie que les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont libres alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution d'exercice 02 :

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on concidère le sous espace vectoriel suivant : $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$

(C'est à dire l'ensemble F contient tous les vecteurs quis verifie la relation $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$).

On veut determiner une base de F :

$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$
$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_2 = 2x_1 + 3x_3\}$
$= \{(x_1, 2x_1 + 3x_3, x_3) \ / \ x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$
$= \{(x_1, 2x_1, 0) + (0, 3x_3, x_3) \ / \ x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$
$= \{x_1(1, 2, 0) + x_3(0, 3, 1) \ / \ x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$$F = vect((1, 2, 0), (0, 3, 1)).$$

Maintenant on verra si les vecteurs $v_1 = (1, 2, 0)$ et $v_2 = (0, 3, 1)$ sont libres :

Soient λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$\lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$
$\iff (\lambda_1, 2\lambda_1, 0) + (0, 3\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0).$
$\iff (\lambda_1 + 0, 2\lambda_1 + 3\lambda_2, 0 + \lambda_2) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0 & = 0 \quad ...(1) \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & = 0 \quad ...(2) \\ 0 + \lambda_2 & = 0 \quad ...(3) \end{cases}$$

De (1) et (2) on a :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$$

donc les vecteurs v_1 et v_2 sont libres alors $\{(1, 2, 0), (0, 3, 1)\}$ forme une base de F.

- $dim\ F = 2$ (c'est le nombre des vecteurs dans la base obtenue).

Solution d'exercice 03 :

Dans l'space vectoriel $\mathbb{R}^4$, on concidère le sous espace vectoriel suivant : $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

(C'est à dire l'ensemble F contient tous les vecteurs quis verifie la relation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$).

On veut determiner une base de F :

$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 = -x_2 - x_3 - x_4\}$
$F = \{(-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$
$F = \{(-x_2, x_2, 0, 0) + (-x_3, 0, x_3, 0) + (-x_4, 0, 0, x_4) \ / \ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$
$F = \{x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1) \ / \ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$$F = vect((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)).$$

Maintenant on verra si les vecteurs $u_1 = (-1,1,0,0), u_2 = (-1,0,1,0), u_3 = (-1,0,0,1)$ sont libres :

Soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$, on a :

$\lambda_1(-1,1,0,0) + \lambda_2(-1,0,1,0) + \lambda_1(-1,0,0,1) = (0,0,0,0)$

$\Longleftrightarrow (-\lambda_1, \lambda_1, 0, 0) + (-\lambda_2, 0, \lambda_2, 0) + (-\lambda_3, 0, 0, \lambda_3) = (0,0,0,0).$

$\Longleftrightarrow (-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0,0,0)$

$$\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \quad ...(1) \\ \lambda_1 = 0 & = 0 \quad ...(2) \\ \lambda_2 = 0 & = 0 \quad ...(3) \\ \lambda_3 = 0 & = 0 \quad ...(4) \end{cases}$$

De (2), (3) et (4) on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ceci signifie que les vecteurs u_1, u_2 et u_3 sont libres alors $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ est une base de F.

- $dim\ F = 3$.