Université Ferhat Abbas, Sétif 1

$1^{ére}$Année Aménagement **Mathématique I 2020/2021**

Série d'exercices 01

Exercice 01 :

I)On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (2, -1, 1)$ et $v = (1, -2, 5)$.

- Ecrire le vecteur v comme combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, v_3.

II) On considère dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1 = (1, -3, 2)$, $u_2 = (2, -4, -1)$, $u_3 = (1, -5, 7)$ et $u = (2, -5, 3)$.

- Peut-on écrire u comme combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, u_3.

Exercice 02 :

I) Soient $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 1, 2)$ et $v_3 = (1, -1, 2)$ des vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

- Les vecteurs v_1, v_2, v_3, sont-ils linéairement indépendants.

II) On considère dans $\mathbb{R}^3$,Soient $u_1 = (1, -2, 1)$, $u_2 = (2, 1, -1)$, $u_3 = (7, 1, -2)$ des vecteurs de l'ev $\mathbb{R}^3$.

- Les vecteurs u_1, u_2, u_3, sont-ils linéairement indépendants.

Exercice 03 :

Les vecteurs suivants sont-elles libres

1. $v_1 = (1, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, 0), v_3 = (0, 0, 1, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1)$.
2. $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 1, 1)$.
3. $w_1 = (1, 0, 1), w_2 = (0, 2, 2), w_3 = (3, 7, 1)$.
4. $t_1 = (2, 1, 3, -1, -4, -1), t_2 = (-1, 1, -2, 2, -3, 3), t_3 = (1, 5, 0, 4, -1, 7)$.

Solution de la série

Solution d'exercice 01 :

I)On veut écrire $v=(1,-2,5)$ comme combinaison linéaire de $v_1=(1,1,1)$,$v_2=(1,2,3)$,$v_3=(2,-1,1)$, on cherche alors 3 scalaires λ_1, λ_2, $\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que :

$$v=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3$$

$\Longleftrightarrow (1,-2,5)=\lambda_1(1,1,1)+\ \lambda_2(1,2,3)+\ \lambda_3(2,-1,1).$
$\Longleftrightarrow (1,-2,5)=(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_1)+(\lambda_2,2\lambda_2,3\lambda_2)+(2\lambda_3,-\lambda_3,\lambda_3).$
$\Longleftrightarrow (1,-2,5)=(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3,\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3,\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3)$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3= & 1 & ...(1)\\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3= & -2 & ...(2)\\ \lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3= & 5 & ...(3)\end{array}\right.$$

De (1) on a : $\lambda_1=1-\lambda_2-2\lambda_3$.....(4), en remplaçant cette valeur dans (2) et (3), on obtient :

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} (1-\lambda_2-2\lambda_3)+2\lambda_2-\lambda_3 & = & -2\\ (1-\lambda_2-2\lambda_3)+3\lambda_2+\lambda_3 & = & 5\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \lambda_2-3\lambda_3= & -3 & ...(i)\\ 2\lambda_2-\lambda_3= & 4 & ...(ii)\end{array}\right.$$

De (i) on a : $\lambda_2=-3+3\lambda_3$ puis en remplaçant cette valeur dans (ii),on obtient : $2(-3+3\lambda_3)-\lambda_3=4$ d'où $\boxed{\lambda_3=2}$ et donc $\lambda_2=-3+3\lambda_3$ c'est à dire $\boxed{\lambda_2=3}$.

en remplaçant les valeurs de λ_1 et λ_2 dans (4) on obtient $\boxed{\lambda_1=-6}$.

Par suite :

$$v=-6v_1+3v_2+2v_3.$$

II) On verra si $u=(2,-5,3)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1=(1,-3,2)$, $u_2=(2,-4,-1)$, $u_3=(1,-5,7)$, on cherche **(s'ils existent)** 3 scalaires λ_1, λ_2, $\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que :

$$u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3.$$

$\Longleftrightarrow (2,-5,3)=\lambda_1(1,-3,2)+\lambda_2(2,-4,-1)+\lambda_3(1,-5,7).$
$\Longleftrightarrow (2,-5,3)=(\lambda_1,-3\lambda_1,2\lambda_1)+(2\lambda_2,-4\lambda_2,-\lambda_2)+(\lambda_3,-5\lambda_3,7\lambda_3).$
$\Longleftrightarrow (2,-5,3)=(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3,-3\lambda_1+-4\lambda_2-5\lambda_3,2\lambda_1-\lambda_2+7\lambda_3).$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3= & 2 & ...(1)\\ -3\lambda_1-4\lambda_2-5\lambda_3= & -5 & ...(2)\\ 2\lambda_1-\lambda_2+7\lambda_3= & 3 & ...(3)\end{array}\right.$$

De (1) on a : $\lambda_1=2-2\lambda_2-\lambda_3$, en remplaçant cette valeur dans (2) et (3), on obtient :

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -3(2-2\lambda_2-\lambda_3)-4\lambda_2-5\lambda_3 & = & -5\\ 2(2-2\lambda_2-\lambda_3)-\lambda_2+7\lambda_3 & = & 3\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} 2\lambda_2-2\lambda_3= & 1 & ...(i)\\ -5\lambda_2+5\lambda_3= & -1 & ...(ii)\end{array}\right.$$

De (i) on a: $\lambda_2 = \lambda_3 + \frac{1}{2}$ puis en remplaçant cette valeur dans (ii), on obtient : $-5(\lambda_3 + \dfrac{1}{2}) + 5\lambda_3 = -1$ c'est à dire $-\dfrac{5}{2} = -1$!!! Impossible !

Alors λ_2 et λ_3 et donc λ_1 n'existent pas, on peut pas donc écrire le vecteur u comme combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2 et u_3.

Solution d'exercice 02 :

$I)$ On verra si les vecteurs $v_1 = (1,2,3), v_2 = (1,1,2), v_3 = (1,-1,2)$ sont linéairement indépendants (libres), soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ alors on a :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0,0,0)$$

$\iff \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(1,1,2) + \lambda_3(1,-1,2) = (0,0,0)$.
$\iff (\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1) + (\lambda_2, \lambda_2, 2\lambda_2) + (\lambda_3, -\lambda_3, 2\lambda_3) = (0,0,0)$.
$\iff (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3) = (0,0,0)$.

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = & 0 \quad ...(1) \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = & 0 \quad ...(2) \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = & 0 \quad ...(3) \end{cases}$$

De (1) on a : $\lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3$ .....(4), en remplaçant cette valeur dans (2) et (3), on obtient :

$$\iff \begin{cases} 2(-\lambda_2 - \lambda_3) + \lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ 3(\lambda_2 - \lambda_3) + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_2 - 3\lambda_3 = & 0 \quad ...(i) \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = & 0 \quad ...(ii) \end{cases}$$

De (i) on a : $\lambda_2 = -3\lambda_3$ puis en remplaçant cette valeur dans (ii),on obtient : $-(-3\lambda_3) - \lambda_3 = 0$ d'où $\boxed{\lambda_3 = 0}$,et donc $\lambda_2 = -3\lambda_3$ c'est à dire $\boxed{\lambda_2 = 0}$.

en remplaçant les valeurs de λ_1 et λ_2 dans (4) on obtient $\boxed{\lambda_1 = 0}$.

On a montré donc que $\forall\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Alors les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants.

$II)$ verra si les vecteurs $u_1 = (1,-2,1)$, $u_2 = (2,1,-1)$, $u_3 = (7,1,-2)$ sont linéairement indépendants, soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ alors on a :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0,0,0)$$

$\iff \lambda_1(1,-2,1) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(7,1,-2) = (0,0,0)$.
$\iff (\lambda_1, -2\lambda_1, \lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2) + (7\lambda_3, \lambda_3, -2\lambda_3) = (0,0,0)$.
$\iff (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3, -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3) = (0,0,0)$.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = & 0 \quad ...(1) \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = & 0 \quad ...(2) \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = & 0 \quad ...(3) \end{cases}$$

De (3) on a : $\lambda_1 = \lambda_2 + 2\lambda_3$ .....(4), en remplaçant cette valeur dans (1) et (2), on obtient :

$$\begin{cases} (\lambda_2 + 2\lambda_3) + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 & = & 0 \\ -2(\lambda_2 + 2\lambda_3) + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3\lambda_2 + 9\lambda_3 = & 0 \quad ...(i) \\ -\lambda_2 - 3\lambda_3 = & 0 \quad ...(ii) \end{cases} \Longrightarrow \lambda_2 = -3\lambda_3$$

De (4) on a: $\lambda_1 = -3\lambda_3 + 2\lambda_3$ c'est à dire $\lambda_1 = -\lambda_3$

On a montré donc que $\forall\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0,0,0)$ n'implique pas que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Alors les vecteurs u_1, u_2et u_3 ne sont pas libres(linéairement indépendants)

(les vecteurs sont liées : linéairement dépendants).

Solution d'exercice 03 :

1) On verra si les vecteurs $v_1 = (1,0,0,0), v_2 = (0,1,0,0), v_3 = (0,0,1,0), v_4 = (0,0,0,1)$ sont libres, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ alors on a :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = (0,0,0,0)$$

$\Longleftrightarrow \lambda_1(1,0,0,0) + \lambda_2(0,1,0,0) + \lambda_3(0,0,1,0) + \lambda_4\,(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$
$\Longleftrightarrow (\lambda_1,0,0,0) + (0,\lambda_2,0,0) + (0,0,\lambda_3,0) + (0,0,0,\lambda_4) = (0,0,0,0)$.
$\Longleftrightarrow (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = (0,0,0,0)$.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

On a montré donc que $\forall\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = (0,0,0,0) \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda$

Alors les vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 sont libres.

2) On verra si les vecteurs $u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,1,1)$ sont linéairement indépendants, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ alors on a :

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0,0,0)$
$\Longleftrightarrow \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(1,1,1) = (0,0,0)$.
$\Longleftrightarrow (\lambda_1,0,0) + (0,\lambda_2,\lambda_2) + (\lambda_3,\lambda_3,\lambda_3) = (0,0,0)$.
$\Longleftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)$.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & -\lambda_3 \\ \lambda_2 & = & -\lambda_3 \end{cases}$$

Donc une infinités de solutions, alors on a montré que $\forall\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0,0,0)$$

n'implique pas que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Alors les vecteurs u_1, u_2et u_3 ne sont pas linéairement indépendants (liées).

3)On verra si les vecteurs $w_1 = (1,0,1), w_2 = (0,2,2), w_3 = (3,7,1)$ sont linéairement indépendants(libres), soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ alors on a:

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = (0,0,0)$$

$\Longleftrightarrow \lambda_1(1,0,1)+\ \lambda_2(0,2,2)+\ \lambda_3(3,7,1) = (0,0,0).$
$\Longleftrightarrow (\lambda_1, 0, \lambda_1) + (0, 2\lambda_2, 2\lambda_2) + (3\lambda_3, 7\lambda_3, \lambda_3) = (0,0,0).$
$\Longleftrightarrow (\lambda_1 + 3\lambda_3, 2\lambda_2 + 7\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0).$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 & = 0 \ ...(1) \\ 2\lambda_2 + 7\lambda_3 & = 0 \ ...(2) \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \ ...(3) \end{cases}$$

De (1) et(2) on a : $\lambda_1 = -3\lambda_3,\ \lambda_2 = \dfrac{-7}{2}\lambda_3$ en remplaçant les deux valeurs dans (3), on obtient :

$-3\lambda_3 + 2(\dfrac{-7}{2}\lambda_3) + \lambda_3 = 0$ donc $-9\lambda_3 = 0$ c'est à dire $\lambda_3 = 0$. $\lambda_1 = -3\lambda_3,\ \lambda_2 = \dfrac{-7}{2}\lambda_3$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

On a montré donc que $\forall\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Alors les vecteurs w_1, w_2et w_3 sont linéairement indépendants.

4)On verra si les vecteurs $t_1 = (2,1,3,-1,-4,-1), t_2 = (-1,1,-2,2,-3,3), t_3 = (1,5,0,4,-1,7)$ sont linéairement indépendants(libres), soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ alors on a:

$$\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 t_3 = (0,0,0,0,0,0)$$

$\Longleftrightarrow \lambda_1(2,1,3,-1,-4,-1)+\ \lambda_2(-1,1,-2,2,-3,3)+\ \lambda_3(1,5,0,4,-1,7) = (0,0,0,0,0,0).$

$\Longleftrightarrow (2\lambda_1, \lambda_1, 3\lambda_1, -\lambda_1, -4\lambda_1, -\lambda_1)+(-\lambda_2, \lambda_2, -2\lambda_2, 2\lambda_2, -3\lambda_2, 3\lambda_2)+ (\lambda_3, 5\lambda_3, 0, 4\lambda_3, -\lambda_3, 7\lambda_3) = (0,0,0,0,0,0).$

$\Longleftrightarrow (2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3, 3\lambda_1 - 2\lambda_2, -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3, -4\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3) = (0,0,0,0,0,0).$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \ldots (1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 & = 0 \ldots (2) \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 & = 0 \ldots (3) \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 & = 0 \ldots (4) \\ -4\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \ldots (5) \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 & = 0 \ldots (6) \end{cases}$$

De (3) on a $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 \ldots .(i)$, par addition (1) et(2) on obtient $3\lambda_1 + 6\lambda_3 = 0$ c'est à dire $\lambda_3 = \frac{-1}{2}\lambda_1 \ldots .(ii)$, en remplaçant (i) et (ii) dans (5)

$-4\lambda_1 - 3(\frac{3}{2}\lambda_1) - (\frac{-1}{2}\lambda_1) = 0$ qui nous donne $-8\lambda_1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$ par suite $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Alors les vecteurs t_1, t_2et t_3 sont linéairement indépendants (libres).