Chap. I : Propriétés des fluides

Exercice 1

Soit un volume d'huile V= 6m^3 qui pèse G= 47KN. Calculer la masse volumique, le poids spécifique et la densité de cette huile sachant que g= 9.81 m/s^2. Calculer le poids G et la masse M d'un volume V= 3 litres d'huile de boite de vitesse ayant une densité égale à 0.9

Solution

- Masse volumique

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{G}{gV} = \frac{47.1000}{9.81 * 6} = \underline{798.5}\ \underline{\text{kg/m}^3}$$

- Poids volumique

$$\varpi = \rho g \Longrightarrow \varpi = 798.5 * 9.81 \quad = \underline{7833.3\ \text{N/m}^3}$$

- Densité

$$d = \frac{\rho}{\rho_{réf}} \Longrightarrow d = \frac{798.5}{1000} = \underline{0.7985}$$

- Poids ; $\varpi = \frac{G}{V} \Longrightarrow$ G = $\varpi * V$ = ρ g V = 0.9 $\cancel{10^3}$. 9.81. 3.$\cancel{10^{-3}}$ = $\underline{26.48\ \text{N}}$

- Masse : M = ρ*V = 0.9 $\cancel{10^3}$ * 3.$\cancel{10^{-3}}$ = $\underline{2.7\ \text{kg}}$ $\quad M = \frac{G}{g} = \frac{26.48}{9.81} = \underline{2.7 kg}$

Exercice 2

Déterminer le poids volumique de l'essence sachant que sa densité d=0,7. On donne :

- l'accélération de la pesanteur g=9,81 m/s^2
- la masse volumique de l'eau ρ =1000 kg /m^3

Solution

$$\varpi = \rho g \Longrightarrow \varpi = 0.7 * 1000 * 9.81 = 6867\ \underline{\text{N/m}^3}$$

Exercice 3

Déterminer la viscosité dynamique d'une huile moteur de densité d = 0.9 et de viscosité cinématique ν= 1.1 St

Solution

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \Longrightarrow \mu = \upsilon.\rho = 1.1*10^{-4}.900 = \underline{0.099 Pa.s}$$

Exercice 4

La viscosité de l'eau à 20°c est de 0.01008 Poise. Calculer

- La viscosité absolue (dynamique)
- Si la densité est de 0.988, calculer la valeur de la viscosité cinématique en m^2/s et en Stokes

Solution

1 Po = 10^{-1} Pl $\qquad \mu = \underline{0.001008 Pa.s}$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \Longrightarrow \nu = \frac{0.001008}{988}$$

ν= 1.02 * 10^{-6} m^2/s = 1.02 10^{-2} St

Exercice 5

Du fuel porté à une température T=20°C a une viscosité dynamique μ = 95.10^{-3} Pa.s. Calculer sa viscosité cinématique ? en stockes sachant que sa densité est d=0,95.

On donne la masse volumique de l'eau est 1000 kg /m^3

Solution

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad \nu = \frac{0.095}{950} = \underline{10^{-4}\ m^2/s = 1\ St}$$

(1 stokes = 1 cm^2/s = 10^{-4} m^2/s)

Exercice 6

On comprime un liquide dont les paramètres à l'état initial sont : p_1= 50bar et V_1= 30.5 dm^3 et les paramètres à l'état final sont : p_2= 250bar et V_2= 30dm^3. Calculer le coefficient de compressibilité β de ce liquide

Solution

$$\beta = -\frac{dV/V}{dp} = -\frac{dV}{dpV} = -\frac{(30.5-30)}{(250-50)*30.5} = \underline{-8.2*10^{-5} bar^{-1}}$$

Exercice 7

Calculer la masse volumique, le poids volumique et la densité de 6 m^3 d'huile pèsent 47 kN.

Solution :

$$P = 47000N = Mg \Rightarrow M = \frac{P}{g} = \frac{47000}{9.81} = 4791.03kg$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{4791.03}{6} = 798.5\ kg/m^3$$

$$\varpi = \rho g = 7833.33\ \ N/m^3$$

$$d = \frac{\rho}{\rho_{eau}} = \frac{798.5}{1000} = 0.798$$

Exercice 8

Si le poids volumique d'un liquide est 8,1 kN/m^3, quelle est sa densité. La masse volumique de l'eau est 1000 kg/m^3.

Solution :

La masse volumique du liquide égale à :

$$\rho = \frac{\omega}{g} = \frac{8100}{9{,}81} = 825{,}68\ kg/m^3$$

Alors la densité vaut :

$$d = \frac{825{,}26}{1000} = 0{,}825$$

Exercice 9

Calculer le poids volumique et la masse volumique de 1 litre du liquide pèse 7 N.

Solution :

On calcule le poids volumique comme suit :

$$\omega = \frac{Mg}{V} = \frac{P}{V} = \frac{7}{0.001} = 7000\ \ N/m^3$$

Alors la masse volumique égale :

$$\rho = \frac{\omega}{g} = \frac{7000}{9{,}81} = 713{,}55\ \ kg/m^3$$

Exercice 10

Calculer la masse du 500cm^3 du liquide si le poids volumique est 12,4 k N/m^3 .

Solution :

On obtient la masse du liquide comme suit :

$$\omega = \frac{Mg}{V} \Rightarrow M = \frac{\omega\, V}{g} = \frac{12{,}4\ 10^3 500\ 10^{-6}}{9{,}81} = 0{,}632\ kg$$

Exercice N°11 :

Un réservoir contenant exactement 5 m3d'huile de pétrole pèse 5122 kg. Sachant que la masse du réservoir vides est de 962 kg, calculer la masse volumique et la densité de l'huile. La masse volumique de l'eau est 1000 kg/m3.

Solution :

La masse de l'huile égalé à :

$$M = 5122 - 962 = 4160kg$$

Alors :

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{4160}{5} = 832\, kg/m^3$$

$$d = \frac{832}{1000} = 0{,}832$$

Exercice N°12 :

On applique une pression de 2×10^6 N/m^2 sur 2000 cm^3 de l'eau, déterminer la variation de volume. On donne $E = 2{,}2\ 10^9\ Pa$

Solution :

Le module de compressibilité de l'eau est :

$$E = -\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}}$$

Alors :

$$\Delta V = -V\frac{\Delta P}{E} = \frac{2\ 10^6}{2{,}2\ 10^9}\ 2000 = -1{,}82\ cm^3$$

EXERCICE 13

Quelle pression doit-on appliquer à l'eau pour réduire son volume de 1,25%. On donne $E = 2{,}2\ 10^9\ Pa$

Solution :

Le module de compressibilité de l'eau est :

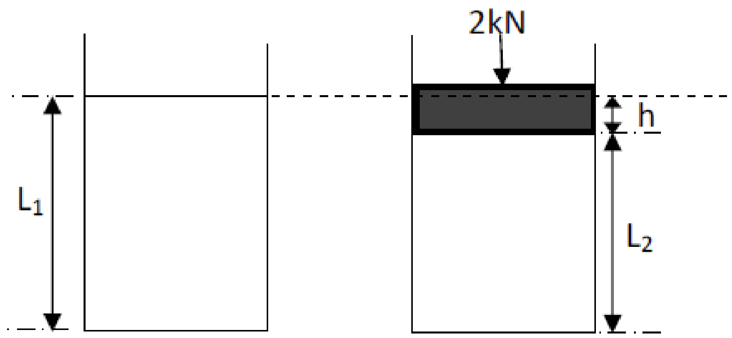
$$E = -\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}}$$

Alors :

$$\Delta P = -E\frac{\Delta V}{V} = 0.0125\ 2{,}2\ 10^9 = 0{,}0275\ 10^9\ Pa = 2{,}75\ MPa$$

EXERCICE 14

Un réservoir cylindrique contient une colonne de L_1=500 mm de l'eau. Le module de compressibilité de l'eau est $E = 2{,}2\ 10^9\ Pa$ .Si le piston applique une pression de 11,3 MPa sur la surface libre de l'eau, déterminer le déplacement h.



Solution :

La diminution du volume due par le piston est :

$$\Delta V = -V\frac{\Delta P}{E} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta P}{E} \Rightarrow \frac{SL_1 - SL_2}{SL_1} = -\frac{\Delta P}{E}$$

Où :

S L_1 : Le volume initial de l'eau ;

SL_2 : Le volume final de l'eau ;

S : Section horizontale du réservoir.

Alors :

$$\frac{L_1 - L_2}{L_1} = \frac{h}{L_1} = -\frac{\Delta P}{E} \Rightarrow h = -\frac{\Delta P}{E} L_1 = -\frac{11{,}3\ 10^6}{2{,}2\ 10^9}\ 0{,}5$$

$$h = -2{,}56\ mm$$

EXERCICE 15

Deux grandes surfaces planes sont à 2,4 cm l'une de l'autre et l'espace entre elles est rempli d'un liquide de viscosité8,1 Pa.s. Quelle est la force nécessaire pour tirer une plaque très fines de 0,5 m^2 de surface à la vitesse constante 60 cm/s, si :

1. La plaque est situé au milieu ;
2. La plaque est située à 0,8 cm d'une des surfaces.

Faites l'hypothèse que le profil de vitesse est linéaire.

Solution :

1. **La plaque située au milieu**

Désignons par :

Fr_1 : la force de frottement sur la face supérieur de la plaque

Fr_2 : la force de frottement sur la face inférieur de la plaque

$$Fr_1 = Fr_2 = \mu\, S \frac{\Delta U}{\Delta y} = 0{,}81\ 0{,}5 \frac{0{,}6 - 0}{0{,}012} = 20{,}25\ N$$

La force de frottement totale = Fr_1+ Fr_2=40,5 N

2. **La plaque est située à 0,8 cm d'une des surfaces.**

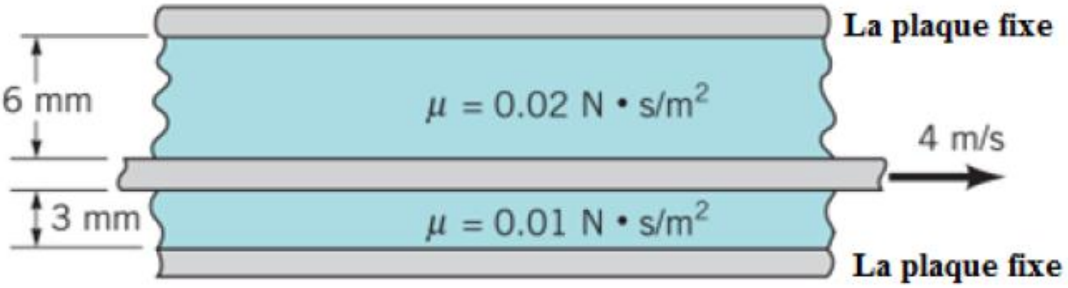
$$Fr_1 = \mu\, S \frac{\Delta U}{\Delta y} = 0{,}81\ 0{,}5 \frac{0{,}6 - 0}{0{,}016} = 15{,}18\ N$$

$$Fr_2 = \mu\, S \frac{\Delta U}{\Delta y} = 0{,}81\ 0{,}5 \frac{0{,}6 - 0}{0{,}008} = 30{,}37\ N$$

La force nécessaire pour tirer la plaque doit être au minimum égale à 45,55 N.

EXERCICE 16

Une grande plaque mobile est située entre deux grandes plaques fixes. Deux liquides newtoniens de viscosité μ_1= 0,02 Pa.s et μ_2 = 0,01 Pa.s sont contenus entre les plaques. Déterminez l'intensité des contraintes sur chacune des parois quand la plaque centrale mobile se déplace à une vitesse de 4 m/s parallèlement aux autres plaques. Faites l'hypothèse que le profil de vitesse entre les plaques est linéaire.



Solution :

Désignons par :

τ_1 : la contrainte de cisaillement sur la face supérieur de la plaque

τ_2 : la contrainte de cisaillement sur la face inférieur de la plaque

$$\tau_1 = \mu \frac{\Delta U}{\Delta y} = 0{,}02 \frac{4-0}{0{,}006} = 13{,}33 \ N/m^2$$

$$\tau_2 = \mu \frac{\Delta U}{\Delta y} = 0{,}01 \frac{4-0}{0{,}003} = 13{,}33 \ N/m^2$$

EXERCICE 17

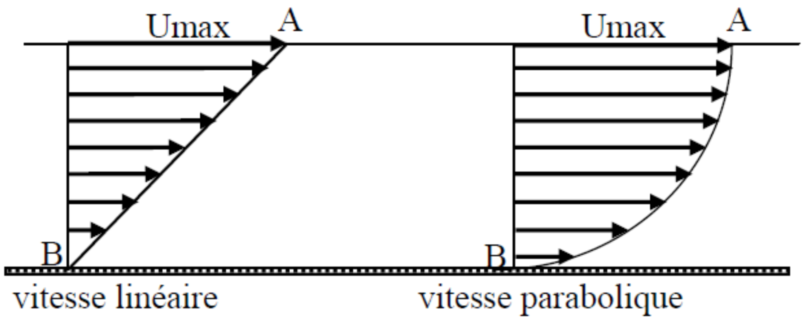
A 34,5 bars, le volume est de 28,32 dm^3, à 241,3 bars, de 28,05 dm^3. Calculer le coefficient de compressibilité de ce liquide.

Solution :

$$\chi = -\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta p} = -\frac{\frac{28.32-28.05}{28.32}}{(34.5-241.3)10^5} = 4.6\ 10^{-10} \ Pa^{-1}$$

EXERCICE 18

Un fluide newtonien (μ = 0,048 Pa.s) s'écoule le long d'une paroi. A 75 mm de la paroi, la particule fluide a une vitesse égale a 1,125 m/s. Calculer l'intensité de la contrainte de cisaillement, au niveau de la paroi, a 25 mm, a 50 mm et a 75 mm de celle-ci, en admettant une distribution de vitesse linéaire et une distribution de vitesse parabolique. La parabole de la figure à son sommet en A.



Solution :

1. Vitesse linéaire

U=Ay+B

Pour y=0.0, on a U=0 alors B=0

Pour y=0.075m, on a U=1.125, alors U=1,125=A × 0.075 donc A=15

On obtient finalement U=15 × y

Le gradient de vitesse : dU/dy=15 S^{-1} et $\tau=\mu$ dU/dy=0.048×15=0.72 Pa pour toute les valeurs de y compris entre0 à 75 mm.

2. Vitesse parabolique

$U=Ay^2+By+C$

Pour y=0.0, on a U=0 alors C=0

Pour y=0.075, on a U=1.125, alors U=1.125=A × $(0.075)^2$+B ×0.075 (1)

Ainsi pour y=0.075 U=Umax c.-à-d. dU/dy=2×A×y+B=0.0

→ dU/dy=2 A × 0.075+B=0.0→B=-0,15A

En remplaçant la valeur de B dans l'équation (1) de la vitesse, on obtient A=-200

U=-200 y^2+30 y et dU/dy=-400 y+30

Chapitre 2 : Statique des fluides

Exercice 1 : Une brique de dimension (20x10x5) cm pèse 2.5 kg. Quelle pression exerce-t-elle sur le sol suivant la face sur laquelle on la pose ?

Solution

Face 1 : $p_1 = \frac{F}{S_1} = \frac{mg}{S_1} = \frac{2.5*9.81}{0.2*0.1} = 1226.25\ \frac{N}{m^2}$

Face 2 : $p_2 = \frac{F}{S_2} = \frac{mg}{S_2} = \frac{2.5*9.81}{0.2*0.05} = 2425.50\ \frac{N}{m^2}$

Face 3 : $p_3 = \frac{F}{S_3} = \frac{mg}{S_3} = \frac{2.5*9.81}{0.1*0.05} = 4905.00\ \frac{N}{m^2}$

Exercice 2 : On enfonce une punaise métallique dans une planche en exerçant sur sa tête une force de 3 kgf avec le pouce ; la tête a 1cm de diamètre et la pointe 0.5mm
Quelles sont les pressions exercées sur le pouce ensuite sur la planche ?

Solution

Pression sur le pouce :

$$P = \frac{F}{S} = \frac{3*9.81}{\pi\frac{(10^{-2})^2}{4}} = 3.8.10^5\ Pa$$

Sur le bois :

$$P = \frac{F}{S} = \frac{3*9.81}{\pi\frac{(0.5^{-3})^2}{4}} = 1530.10^5\ Pa$$

La pression augmente lorsque la surface pressée est petite

Exercice 3 : Combien faut-il de mètres d'eau pour avoir une différence de pression de 1bar?

Solution

$\Delta P = \rho g h$ soit $10^5 = 10^3\ 9.81\ h$ d'où $h = 10.19$ m

Exercice 4 : Calculer la pression relative et la pression absolue auquel est soumis un plongeur en mer à une profondeur de 31.6m. On donne $\rho_{eau\ de\ mer}$ = 1025 kg/m^3

Solution

Pression relative

Pr = $\rho_{eau\ de\ mer}$ g h = 1025. 9.81. 31.6 = 317 746 Pa = 3.17 bar

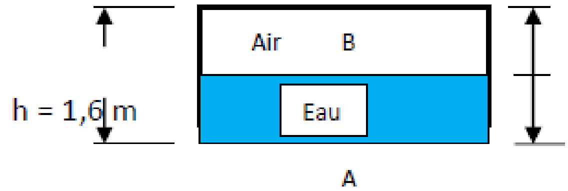
Pression absolue = Pression relative + pression atmosphérique

Soit $P_{absolue}$ = 317 746 + 101 325 = 419 071 Pa = 4.19 bar

Exercice 5 : La cuve ci-contre est à moitié pleine d'eau. Calculez la différence de pression entre les points A et B, puis entre les points B et C. Comparer ces résultats et conclure !

On donne : - masse volumique de l'eau 10^3 kg/m^3

- masse volumique de l'air 1.3 kg/m^3



Solution

$\Delta P_{AB} = \rho_{eau}\, g\, (h_A - h_B) = \rho_{eau}\, g\, h/2$ soit $\Delta P_{AB} = 10^3\ 9.81\ 0.8 = 7\ 848$ Pa

$\Delta P_{BC} = \rho_{air}\, g (h_B - h_C) = \rho_{air}\, g\, h/2$ soit $\Delta P_{BC} = 1.3\ 9.81\ 0.8 = 10.2$ Pa

Conclusion : la pression dans l'eau est très supérieure devant la pression dans l'air

Exercice 6 : On donne F_1 = 100 N et D_1 = 10cm (diamètre du petit piston)

Le petit piston descend d'une hauteur h_1 = 1m

1. Si le diamètre du grand piston est D_2 = 1m, quelle est l'intensité de la force F_2 exercée sur le grand piston ?
2. De quelle hauteur h_2 monte le grand piston ?

Solution

1.

$$P_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{100}{S_1} = 12732 Pa \quad \text{avec} \quad S_1 = \frac{\pi \times (0{,}1)^2}{4} = 7{,}8.10^{-3}\ \text{m}^2$$

$$F_2 = P_2.S_2 \quad \text{or} \quad P_1 = P_2 \quad \text{soit} \quad F_2 = 12732 \times \frac{\pi}{4}(1)^2 = 10.000\ \text{N}$$

2. V = $S_1 h_1$ = 0,0078 $\times$ 1 = 7,8.10^{-3} m^3

D'où $h_2 = \dfrac{V}{S_2} = \dfrac{7{,}8 \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{4}(1)^2} = 10^{-2} m = 1 cm$

Exercice 7 : Un récipient contient de l'eau sur 20cm et de l'huile sur 50cm. La pression au point A est égale à la pression atmosphérique. Calculer la pression aux points B et C ; sachant que $\rho_{eau} = 10^3 kg/m^3$ et $\rho_{huile} = 900kg/m^3$

Solution :

Soit $P_A = P_{atm} = 10^5$ Pa

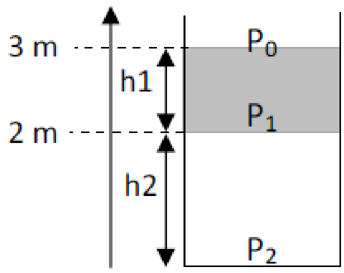
$P_B = P_A + \rho_h\, g\, H_2 = 10^5 + 900 .9.81.\ 0.5 =$ <u>104500 Pa</u>

$P_C = P_B + \rho_e\, g\, H_1 = 104500 + 1000.\ 9.81.\ 0.2 =$ <u>106482 Pa</u>

EXERCICE 8

Un récipient contient de l'eau jusqu'à 2m et par-dessus de l'huile jusqu'à 3 m. La densité de l'huile d_h=0,83. Calculez la pression absolue et relative au fond du récipient

Solution :



L'application de l'EFH entre 1 et 0 et entre 2 et 1 donne :

$P_1=P_0+\rho_{huile}\, g\, h_1$

$P_2=P_1+ \rho_{eau}\, g\, h_2= P_0+d\, \rho_{eau}\, g\, h_1+ \rho_{eau}\, g\, h_2$

- La pression absolue : $P_0=10^5$ Pa

$P_2=10^5+0{,}83\ 10^3\ 9.81\ (1) + 10^3\ 9.81\ (2)=1277623$ Pa=1.28 bar

- La pression relative : $P_0=0$

$P_2=0+0{,}83\ 10^3\ 9.81\ (1) + 10^3\ 9.81\ (2)=277623$ Pa=0.28 bar

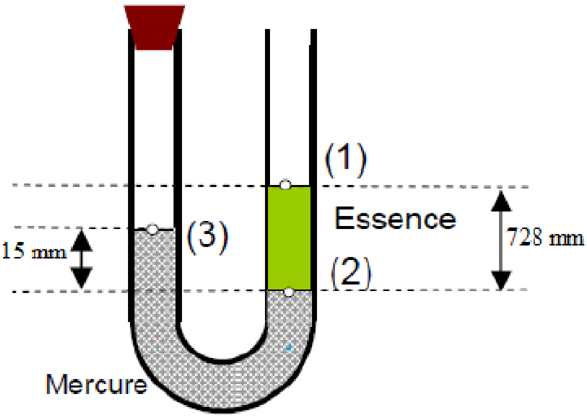
EXERCICE 9

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles.

Calculer la pression P_3 du gaz emprisonne dans la branche fermé. On donne :

$\rho_{Hg}=13600\ Kg/m^3$ et $\rho_{essence}=700\ Kg/m^3$, $Patm=10^5$ Pa

Solution :



Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique (EFH) ente 1 et 2, puis 2 et 3 :

$$P_2 = P_1 + \rho_{ess} g\,(0{,}728) \qquad (1)$$

$$P_2 = P_3 + \rho_{Hg} g\,(0{,}015) \qquad (2)$$

Alors :

$$P_3 = P_2 - \rho_{Hg} g\,(0{,}015)$$

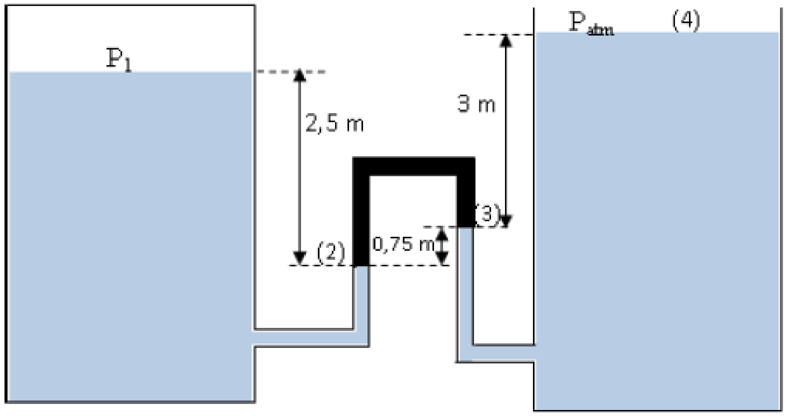
$$P_3 = P_1 + \rho_{ess} g\,(0{,}728) - \rho_{Hg} g\,(0{,}015)$$

$$P_3 = 10^5 + 700\ 9{,}81\ 0{,}728 - 13600\ 9{,}81\ 0{,}015$$

$$P_3 = \mathbf{1{,}310^5}\ \boldsymbol{Pa}$$

EXERCICE 10

Deux réservoirs d'eau sont relié entre eux par un manométre contenant du mercure (d_{Hg}=13,6). Calculer la pression P_1 du réservoir gauche.



Solution :

Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique (EFH) ente 1 et 2, 2 et 3 puis 3 et 4

$$P_2 = P_1 + \rho g\,(2{,}5) \qquad (1)$$

$$P_2 = P_3 + \rho_{Hg} g\,(0{,}75) \qquad (2)$$

$$P_3 = P_4 + \rho g\ \ (3) \qquad (3)$$

Si l'on calcule la pression P_1 à partir de la pression atmosphérique c'est à dire cette pression est manométrique, on soustrait donc P_4 et on trouve :

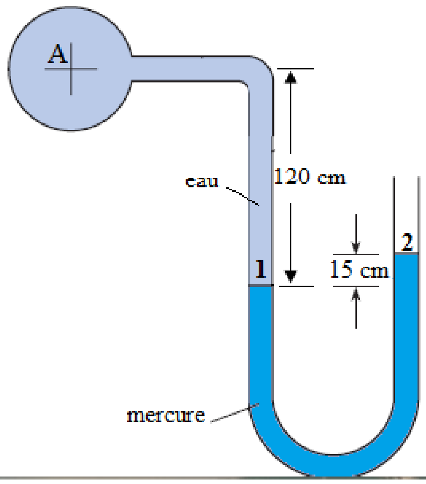
$P_3 = \mathbf{29430\ Pa}$

$P_2 = \mathbf{129492\ Pa}$

$P_1 = P_2 - \rho g\ (2{,}5) = 104967\ Pa = \mathbf{1{,}05\ bar}$

EXERCICE 11

Calculer la pression manométrique en A en kPa due à la dénivellation du mercure, de densité 13,6 dans le manomètre en U représenté sur la figure ci-dessous:



Solution :

Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique (EFH) ente A et 1, puis 1 et 2 :

$P_1 = P_A + \rho g\ (1{,}2)$ (1)

$P_1 = P_2 + \rho_{Hg} g\ (0{,}15) = P_{atm} + \rho_{Hg} g\ (0{,}15)$ (2)

Puisque l'on calcule la pression manométrique, on soustrait donc Patm et on trouve :

$P_1 = \rho_{Hg} g\ (0{,}15) = 13600\ 9{,}81\ 0{,}15 = \mathbf{20012{,}4\ Pa}$

$P_A = P_1 - \rho g\ (1{,}2) = 8240{,}4\ Pa = \mathbf{8{,}24\ kPa}$

EXERCICE 12

Trouver la différence de pression entre A et B dans le montage de la figure ci-dessous.

Solution :

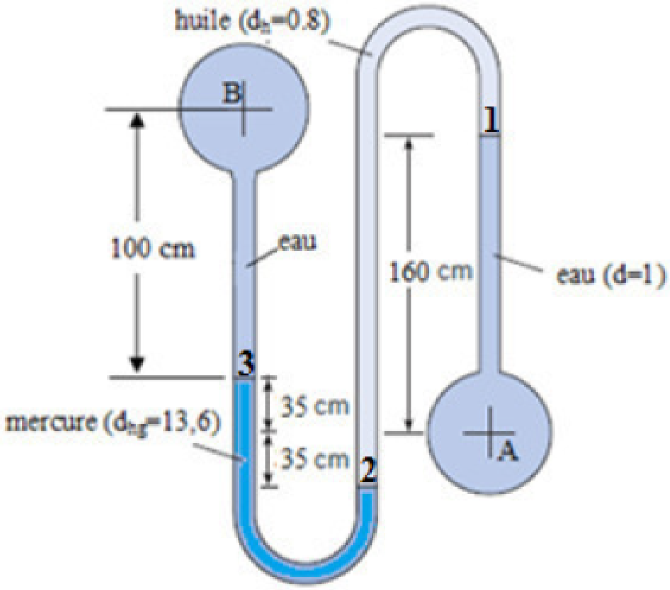
Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique (EFH) ente A et 1, 1 et 2, 2et 3 puis 3 et B :

$P_A = P_1 + \rho g\ (1{,}6)$ (1)

$P_2 = P_1 + \rho_h g\ (1{,}6 + 0{,}35)$ (2)

$P_2 = P_3 + \rho_{Hg} g\ (0{,}35 + 0{,}35)$ (3)

$P_3 = P_B + \rho g\ (1)$ (4)



Remplaçons (4) dans (3) :

$P_2 = P_B + \rho g\ (1) + \rho_{Hg} g\ (0{,}35 + 0{,}35)$ (5)

Remplaçons (5) dans (2) :

$P_B = P_1 + \rho_h g\ (1{,}6 + 0{,}35) - \rho g\ (1) - \rho_{Hg} g\ (0{,}35 + 0{,}35)$ (6)

$(1) - (6) \Rightarrow P_A - P_B = \rho g\ (1{,}6) + \rho g\ (1) + \rho_{Hg} g\ (0{,}35 + 0{,}35) - \rho_h g\ (1{,}6 + 0{,}35)$

$$P_A - P_B \approx \mathbf{103{,}6\ kPa}$$

EXERCICE 13

Un réservoir fermé et sous pression contient de l'huile. Le manomètre affiche 60 kPa. Si la densité de l'huile d_h=0.86 et la densité du mercure d_{Hg}=13,6 calculer la dénivellation du mercure h_3.

Solution :

Posons :

$h_1 = 36\ cm\ \ et\ \ h_2 = 6\ cm$

Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique (EFH) entre 1et 2 puis entre 2 et 3 :

$$P_2 = P_1 + \rho_h g\,(h_1 + h_2)$$

$$P_2 = P_3 + \rho_{Hg} g\,(h_3) \Rightarrow h_3 = \frac{P_2 - P_3}{\rho_{Hg} g}$$

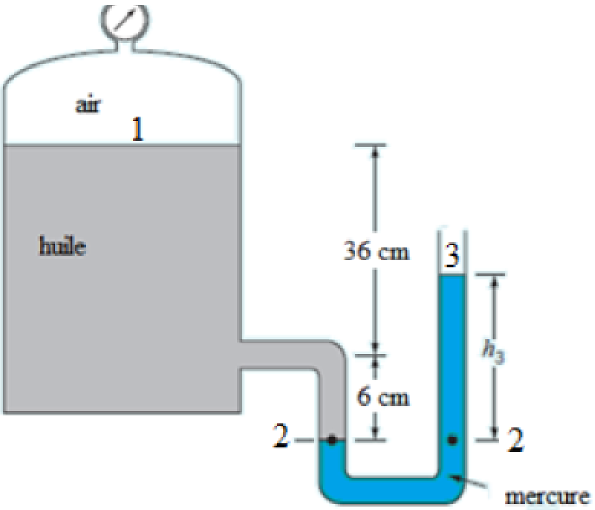
$$P_3 = P_{atm} = 0$$

Donc :

$$h_3 = \frac{P_2}{\rho_{Hg} g} = \frac{P_1 + \rho_h g\,(h_1 + h_2)}{\rho_{Hg} g}$$

$$h_3 = \frac{60\ \ 10^3 + 860\ 9{,}81\ (0{,}36 + 0{,}06)}{13600\ 9{,}81}$$

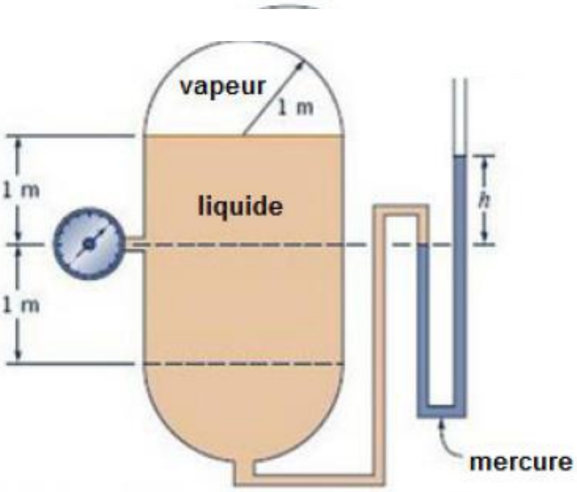
$$h_3 = \mathbf{0{,}476\ m}$$



EXERCICE 14

Un réservoir cylindrique contient un liquide volatile et sa vapeur. Si la densité du liquide est 0,8 et la pression absolue de la vapeur est 120 kPa :

1. Calculer la pression relative affiché par le manométre ;
2. Calculer la dénivellation du mercure h.



On donne : $P_{atm} \approx\ 10^5\ Pa$

Solution :

1. La pression affiché par le manométre

$$P_{(mano)} = \rho_l g\ (1) + P_{vapeur} - P_{atm}$$

$$P_{(mano)} = 800\ 9{,}81\ (1) + 120\ 10^3 - 10^5$$

$$P_{(mano)} = \mathbf{27{,}84\ kPa}$$

2. la dénivellation du mercure h

$$P_{(mano)} = \rho_{Hg} g\ h \Rightarrow h = \frac{P_{(mano)}}{\rho_{Hg} g} = \frac{27{,}84\ 10^3}{13600\ 9{,}81}$$

$$h = \mathbf{0{,}2\ m}$$

Dynamique des fluides parfaits incompressibles

Exercice 1 :

Soit un fluide supposé incompressible (eau) qui s'écoule à travers un tube de venturi représenté par la figure 1.

Données : $\rho_m = 13.6\ 10^3$ kg/m^3 $\rho_{eau} = 10^3$ kg/m^3 V_1= 6m/s D_1= 25 cm

-On demande de calculer le diamètre D_2 si $p_1 = p_2$

-Si cette pression (p_2) est de 12N/cm^2, quelle est la valeur de Δh ?

Solution

Exercice 2 :

Un tube de venturi est disposé sur une conduite d'eau incliné. Les tubes de liaison au manomètre sont remplis d'eau.

1) Calculer la dénivellation Δh du manomètre en fonction de V_1, S_1, S_2, ρ_{eau}, ρ_m
2) Calculer le débit volumique si Δh = 90mm et D_1= 200mm et D_2= 90mm

Solution

1) On applique le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad \text{.........} \quad (1)$$

$$Q_v = S_1 V_1 = S_2 V_2 \Longrightarrow V_2 = S_1 \frac{V_1}{S_2} \quad \text{.........} \quad (2)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) = \frac{V_1^2}{2g}\left[(\frac{S_1}{S_2})^2 - 1\right] + (z_2 - z_1) = \frac{V_1^2}{2g}\left[(\frac{D_1}{D_2})^4 - 1\right] + (z_2 - z_1)$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{V_1^2}{2}\left[(\frac{D_1}{D_2})^4 - 1\right] + \rho g (z_2 - z_1) \quad \text{.........} \quad (3)$$

Equation de l'hydrostatique :

$$\left.\begin{array}{l} p_N = p_1 + \rho_e g\,(z+L+\Delta h) \\ p_{N'} = p_2 + \rho_e g L + \rho_m g \Delta h \end{array}\right\} \Longrightarrow p_1 - p_2 = -\rho_e g z + g\Delta h\,(\rho_m - \rho_e) \quad \text{.........} \quad (4)$$

$$\Delta h = \frac{\rho V_1^2 \left[\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1 \right]}{2g(\rho_m - \rho_e)} \qquad V_1^2 = \frac{2g\Delta h(\rho_m - \rho_e)}{\rho_e\left[(D_1 / D_2)^4 - 1\right]}$$

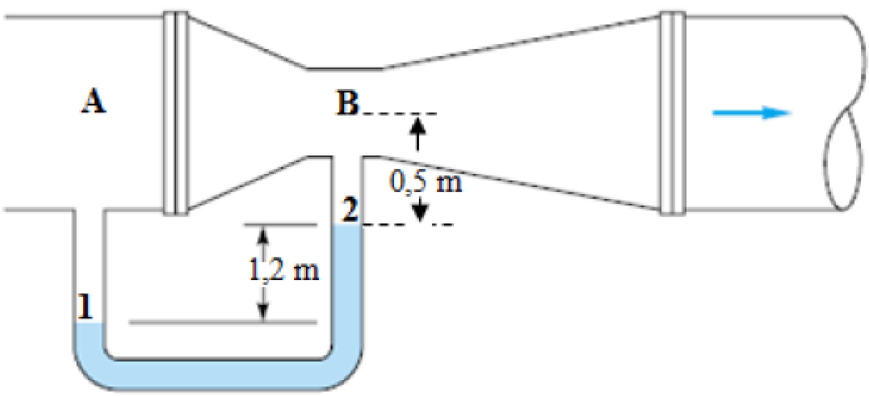
V_1 = <u>0.96 m/s</u>   d'où qv = $S_1 . V_1$ = <u>0.03 m³/s</u>

Exercice N°6 :

De l'eau circule dans un tube de venturi et la dénivellation du mercure dans le manomètre différentiel est 1,2 m. Calculer la différence de pression entre A et B.

Solution :

Appliquons (EFH) entre A et 1, 1 et 2 puis entre 2 et B :



$$P_1 = P_A + \rho g\ (1{,}2 + 0{,}5) \qquad (1)$$

$$P_1 = P_2 + \rho_{Hg}\, g\ (1{,}2) \qquad (2)$$

$$P_2 = P_B + \rho g\ (0{,}5) \Rightarrow P_B = P_2 - \rho g\ (0{,}5) \qquad (3)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow P_A = P_2 + \rho_{Hg}\, g\ (1{,}2) - \rho g\ (1{,}2 + 0{,}5) \qquad (4)$$

$$(4) - (3) \Rightarrow P_A - P_B = \rho_{Hg}\, g\ (1{,}2) - \rho g\ (1{,}2 + 0{,}5) + \rho g\ (0{,}5)$$

$$P_A - P_B = \mathbf{148{,}32\ kPa}$$

Exercice N°7 :

On considère un réservoir circulaire (diamètre d = 1 m). Un piston repose sur la surface libre de l'huile (densité d = 0, 86) qui remplit le réservoir et le tube (pas de frottement et étanchéité parfaite entre le piston et le réservoir). Le manomètre donne la pression à l'extrémité du tube 70 kPa. Calculer la masse du piston.

Solution :

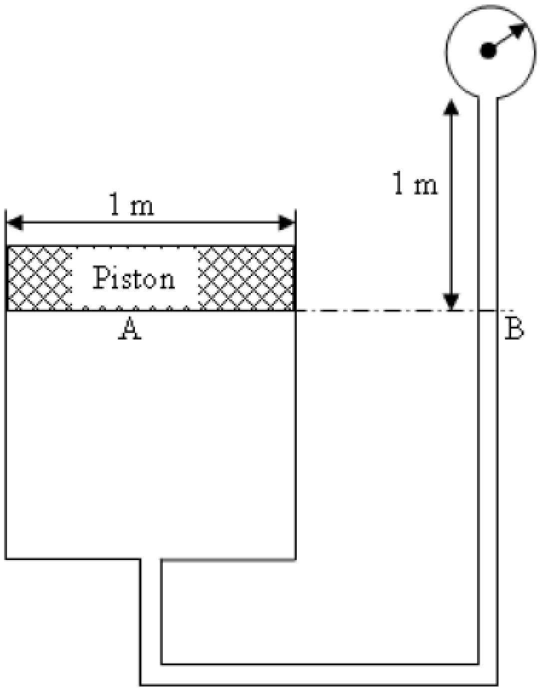
Pression en A= Pression en B

$$\frac{poids\ de\ piston}{surface\ de\ réservoir} = Pc + \rho_{huile} g h$$

$$M = \frac{\pi d^2}{4g}(Pc + \rho_{huile} g h)$$

$$M = \frac{3{,}14 \times 1^2}{4 \times 9{,}81}(70\ 10^3 + 860 \times\ 9{,}81 \times 1)$$

$$M = \mathbf{6276,52\ kg}$$



Exercice N°8 :

L'indicateur de pression au point B (figure ci-dessous) est pour mesurer la pression au point A dans un écoulement de l'eau. Si la pression en B est de 87 kPa, déterminer la pression au point A, en kPa. Données : densité de l'huile d_h=0,87 et la densité du mercure d_{Hg}=13,6

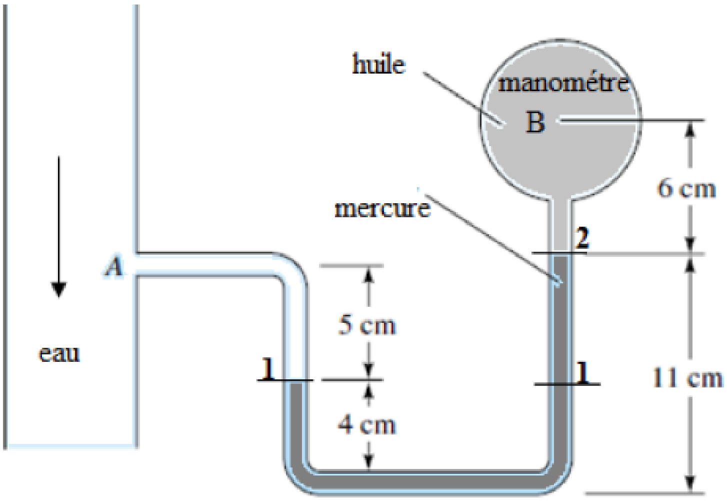


Figure 5

Solution :

$P_1 = P_A + \rho g\ (0{,}05) \qquad (1)$

$P_1 = P_2 + \rho_{Hg} g\ (0{,}07) \qquad (2)$

$P_2 = P_B + \rho_h g\ (0{,}06) \qquad (3)$

Remplaçons (3) en (2)

$P_1 = P_B + \rho_h g\ (0{,}06) + \rho_{Hg} g\ (0{,}07) \qquad (4)$

Remplaçons (1) en (4)

$P_A + \rho g\ (0{,}05) = P_B + \rho_h g\ (0{,}06) + \rho_{Hg} g\ (0{,}07)$

Donc

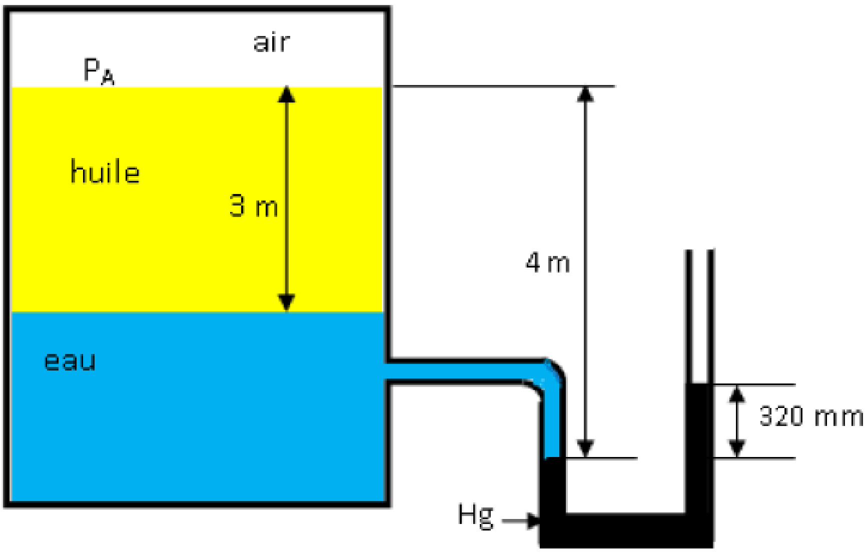
$P_A = P_B + \rho_h g\ (0{,}06) + \rho_{Hg} g\ (0{,}07) - \rho g\ (0{,}05)$

$P_A = P_B + \rho g \left(d_h\ (0{,}06) + d_{Hg}\ (0{,}07) - \ (0{,}05)\right)$

$P_A = 87\ 10^3 + 10^3\ 9{,}81\ \left(0{,}87\ (0{,}06) + 13{,}6\ (0{,}07) - \ (0{,}05)\right) = \mathbf{96{,}36\ kPa}$

Exercice 9:

Le réservoir fermé contient deux liquides non miscibles et est relié par un manomètre comme représenté la figure 1. La densité de l'huile est 0,82. Déterminer la pression manométrique de l'air $\mathbf{P_A}$.



Solution :

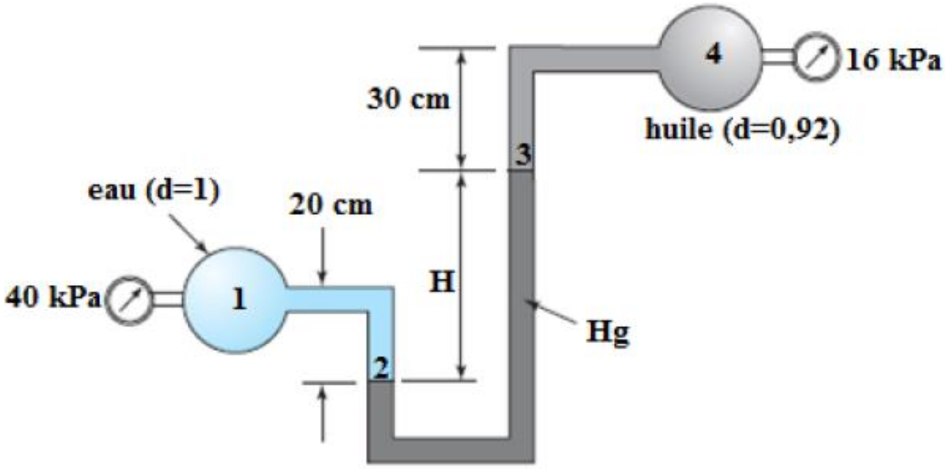
$$P_A + \rho g \times (1) + \rho_h g \ \times (3) = \rho_{Hg} g \times (0{,}32)$$

$$P_A = \rho_{Hg} g (0{,}32) - \rho g (1) - \rho_h g \ (3) = \rho g \left(d_{Hg} \ \times 0{,}32 - 1 - 0{,}82 \times 3\right)$$

$$P_A = 9810(13{,}6 \ \times 0{,}32 - 1 - 0{,}82 \times 3) = 8750{,}52 \ Pa = \mathbf{8{,}75\ KPa}$$

Exercice N°10 :

Déterminer la dénivellation du mercure H dans le montage de la figure ci-dessous.



Solution :

Appliquons (EFH) entre 1et 2, entre 2 et 3 puis entre 3 et 4 :

$$P_2 = P_1 + \rho g \ (0{,}2) = 40 10^3 + 1000 \ 9{,}81 \ (0{,}2) = 41{,}96 \ kPa$$

$$P_2 = P_3 + \rho_{Hg} g \ (H) \Rightarrow H = \frac{P_2 - P_3}{\rho_{Hg} g}$$

$$P_3 = P_4 + \rho_h g \ (0{,}3) = 16 \ 10^3 + 920 \ 9{,}81 \ 0{,}3 = 18{,}71 \ kPa$$

Alors :

$$H = \frac{(41{,}96 - 18{,}71) \ 10^3}{13600 \ 9{,}81} = \mathbf{0{,}174\ m}$$

Exercice N°11 :

Considérons le manomètre incliné décrit à la figure ci-dessous permettant de mesurer la différence de pression entre A et B. Celui-ci est composé de trois fluides différents :

- Eau : ρ_{eau}=1000 Kg/m^3
- Mercure : ρ_{Hg}=13600 Kg/m^3
- Huile : ρ_{huile}=900Kg/m^3

Déterminez la différence de pression entre A et B.

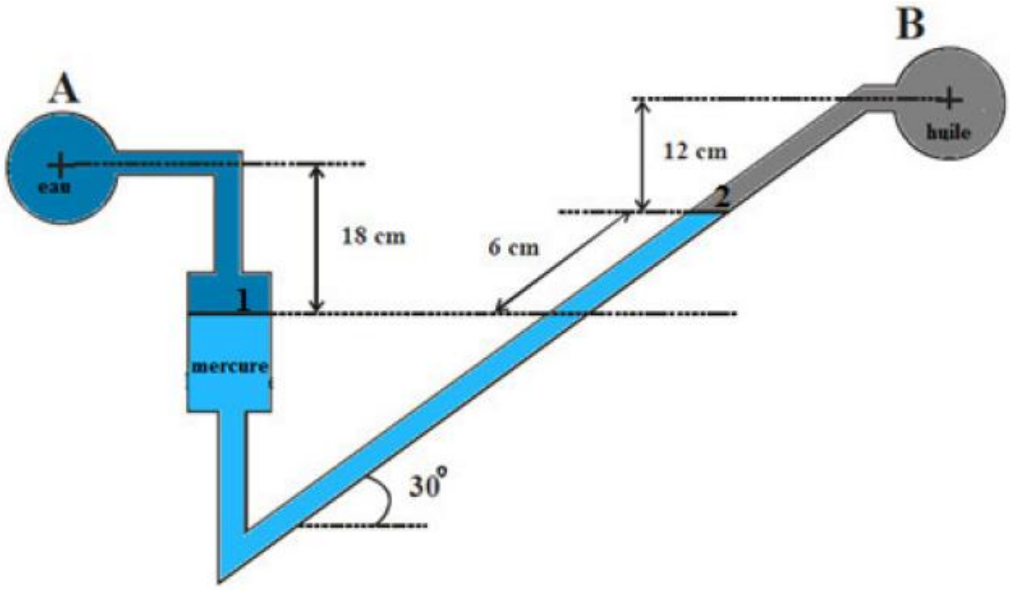
Solution :

Appliquons (EFH) entre A et 1, entre 1 et 2 puis entre 2 et B :

$$P_1 = P_A + \rho g\ (0{,}18) \qquad (1)$$

$$P_1 = P_2 + \rho_{Hg} g\ \sin 30°\ (0{,}06) \qquad (2)$$

$$P_2 = P_B + \rho_h g\ (0{,}12) \qquad (3)$$



Remplaçons (3) et (1) dans (2), on trouve :

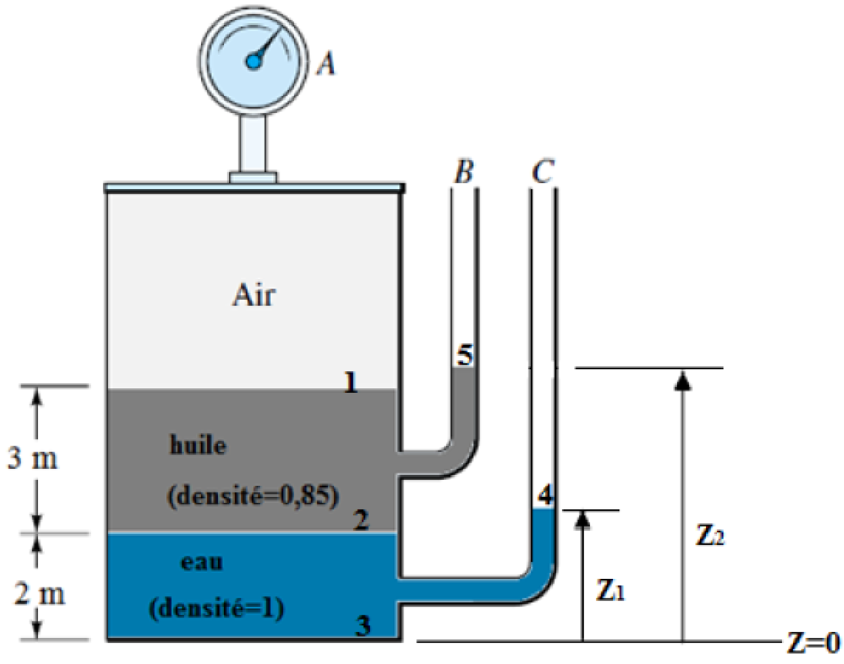
$$P_A + \rho g\ (0{,}18) = P_B + \rho_h g\ (0{,}12) + \rho_{Hg} g\ \sin 30°\ (0{,}06)$$

Alors :

$$P_A - P_B = \rho_h g\ (0{,}12) + \rho_{Hg} g\ \sin 30°\ (0{,}06) - \rho g\ (0{,}18) = \mathbf{3296{,}16\ Pa}$$

Exercice N°12 :

Le réservoir fermé de la figure ci-dessous possède deux piézomètres B et C. Si la pression au manomètre A est 2 kPa, déterminer l'élévation des niveaux de liquide dans les tubes piézométriques ouverts B et C.



Solution :

1. **L'élévation du niveau de liquide dans le tube piézométrique ouvert B**

Appliquons (EFH) entre 2 et 1puis entre 2 et 5 :

$P_2 = P_1 + \rho_h \, g \, (3) \qquad (1)$

$P_2 = P_5 + \rho_h g \, (Z_2 - 2) \qquad (2)$

On a :

$P_1 = 2000 \, Pa \;\; et \; P_5 = P_{atm} = 0$

On remplace (2) en (1) et on déduit la valeur de Z_2 :

$$Z_2 = \frac{P_1 + \rho_h \, g \, (3)}{\rho_h g} + 2 = 5{,}24 \, m$$

2. **L'élévation du niveau de liquide dans le tube piézométrique ouvert C**

Appliquons (EFH) entre 3 et 1puis entre 3 et 4 :

$P_3 = P_1 + \rho g \, (2) + \rho_h \, g \, (3)$

$P_3 = P_4 + \rho g \, Z_1$

On a :

$P_1 = 2000\ Pa\ \ et\ P_4 = P_{atm} = 0$

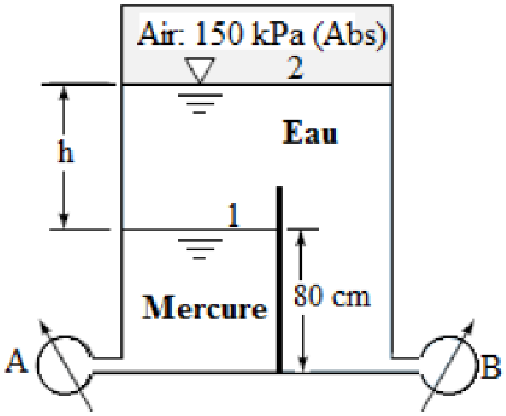
Alors:

$$Z_1 = \frac{P_1 + \rho g\ (2) + \rho_h\ g\ (3)}{\rho g} = \frac{2000 + 1000\ 9{,}81\ 2 + 850\ 9{,}81\ 3}{1000\ 9{,}81} = \mathbf{4,75\ m}$$

Exercice N°13 :

Soit le système de la figure ci-dessous, si on lit sur le manomètre A une pression absolue P_A=300 kPa.

1. Quelle est la hauteur de l'eau h?
2. Que sera la pression affichée au manomètre B (en pression absolue)



<u>Solution :</u>

1. **La hauteur de l'eau h**

Appliquons (EFH) entre A et 1puis entre 1 et 2 :

$$P_A = P_1 + \rho_{Hg} g\ (0{,}8)$$

$$P_1 = P_2 + \rho g\ h$$

Alors :

$$P_A = P_2 + \rho g\ h\ \ + \rho_{Hg} g\ (0{,}8) \Rightarrow h = \frac{P_A - P_2 - \rho_{Hg} g\ (0{,}8)}{\rho g} = \mathbf{4,41 m}$$

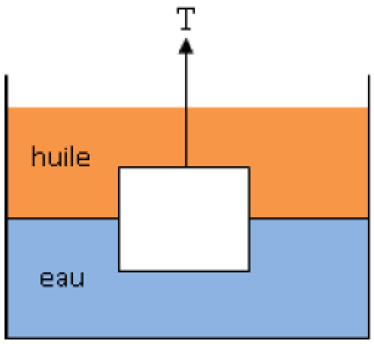
2. **La pression B**

Appliquons (EFH) entre B et 2 :

$$P_B = P_2 + \rho g\ (4{,}41 + 0{,}8) = \mathbf{201,11\ kPa}$$

Exercice N°21 :

Un cube métallique de 15 cm de côté est suspendu par une corde. Le cube est immergé à moitié dans l'huile (densité 0.8) et moitié dans l'eau. Si la masse volumique du métal est de 2640 kg/m^3. Trouvez la force de tension dans la corde.



Solution :

La force de tension dans la corde égale à la différence entre le poids du cube et la poussée d'Archimède :

$T = P - F_A$

Ainsi :

$P = Mg = \rho W g = 2640\ 0{,}15^3 9{,}81 = \mathbf{87{,}4\ N}$

$F_A = F_{A1} + F_{A2}$

Où

F_{A1} et F_{A1} sont les poussées d'Archimède égale au poids de volume de l'eau et de l'huile déplacée :

$$F_A = 1000\ 9{,}81 \frac{0{,}15^3}{2} + 800\ 9{,}81 \frac{0{,}15^3}{2} = \mathbf{29{,}79\ N}$$

$T = 87{,}4 - 29{,}79 = \mathbf{57{,}61\ N}$

Exercice N°22:

Un compartiment rectangulaire ouvert, de 10 m par 4 m de base et de 5 m de profondeur, a une masse de 54 tonnes et flotte dans l'eau douce.

1. De combien s'enfonce-t-il
2. Si l'eau à 5 m de profondeur, quel poids de pierres faut il placer dans le compartiment pour le faire reposer le fond

Solution :

1. Poids de compartiment = poids de l'eau déplacée (poussée d'Archimède)

$$54 \times 1000 \times 9{,}81 = 1000 \times 9{,}81 \times (10 \times 4 \times h)$$

$$h = 1{,}35\ m\ submergés\ dans\ l'eau$$

2. Poids de compartiment et de la pierre = poids de l'eau déplacée

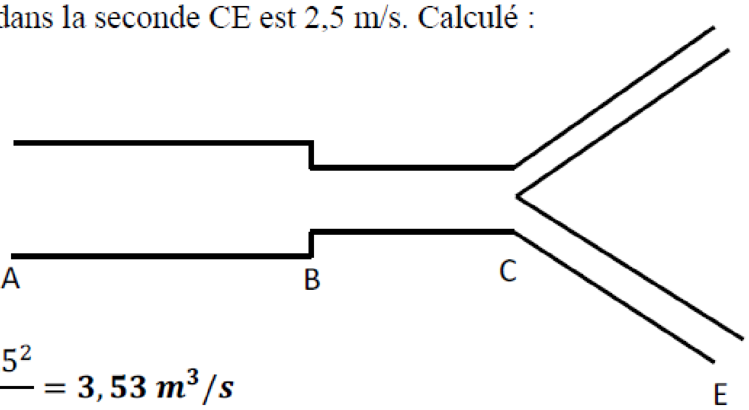
$$54 \times 1000 \times 9{,}81 + P_s = 1000 \times 9{,}81 \times (10 \times 4 \times 5)$$

$$P_s = 1432{,}26\ kN\ de\ pierres$$

EXERCICE 23

De l'eau s'écoule à une vitesse uniforme de *2 m/s* dans une conduite *AB* de d_1=*1,5 m* de diamètre reliée à une conduite BC de d_2=1,2 m de diamètre. Au point C la conduite se sépare en deux parties. La première CD a un diamètre de d_3=0,8 m et transporte le tiers de l'écoulement total. La vitesse dans la seconde CE est 2,5 m/s. Calculé :

1. Le débit dans AB ;
2. La vitesse dans BC ;
3. La vitesse dans CD ;
4. Le diamètre CE.



Solution :

$$Q = V.S = V\frac{\pi d_1^2}{4} = 2\ \frac{3{,}14\ 1{,}5^2}{4} = \mathbf{3{,}53\ m^3/s}$$

$$Q = V_{BC}.S_{BC} \Rightarrow V_{BC} = \frac{4Q}{\pi D d_2^2} = \frac{4\ \ 3{,}53}{3{,}14\ 1{,}2^2} = \mathbf{3{,}12\ m/s}$$

$$Q_{CD} = \frac{Q}{3} = 1{,}176\ m^3/s \Rightarrow V_{CD} = \frac{4Q_{CD}}{\pi D d_3^2} = \frac{4\ 1{,}176}{3{,}14\ 0{,}8^2} = \mathbf{2{,}34\ m/s}$$

$$Q = Q_{CD} + Q_{CE} \Rightarrow Q_{CE} = \frac{2}{3}\ Q = \mathbf{2{,}354\ m^3/s}$$

$$Q_{CE} = V_{CE}\frac{\pi d_4^2}{4} \Rightarrow d_4 = \sqrt{\frac{4\ Q_{CE}}{\pi V_{CE}}} = \mathbf{1{,}095\ m}$$

EXERCICE 24

Le réservoir de la figure ci-dessous se vidange à l'aide de deux sorties. Le diamètre de la sortie 2 et 3 sont respectivement d_2=10 cm et d_3=7 cm.

1. Calculer la variation de niveau de la surface libre (dh/dt) en fonction de Q_2 , Q_3 et le diamètre du réservoir ;
2. Pour le cas h est constante, déterminer la vitesse V_3 si V_2= 2m/s et Q_1= 0,05m^3/s.

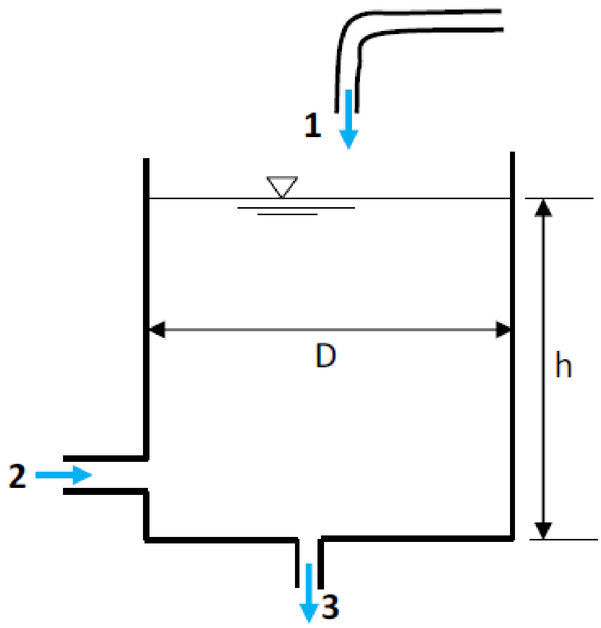
Solution :

1. On appelle Q_r le débit de remplissage du réservoir est égale :

$$Q_r = Q_1 + Q_2 - Q_3 \Rightarrow \frac{\pi D^2}{4}\frac{dh}{dt} = Q_1 + Q_2 - Q_3$$

Alors :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}$$



2. V_3= ?

Si h est constant alors :

$$Q_3 = Q_1 + Q_2$$

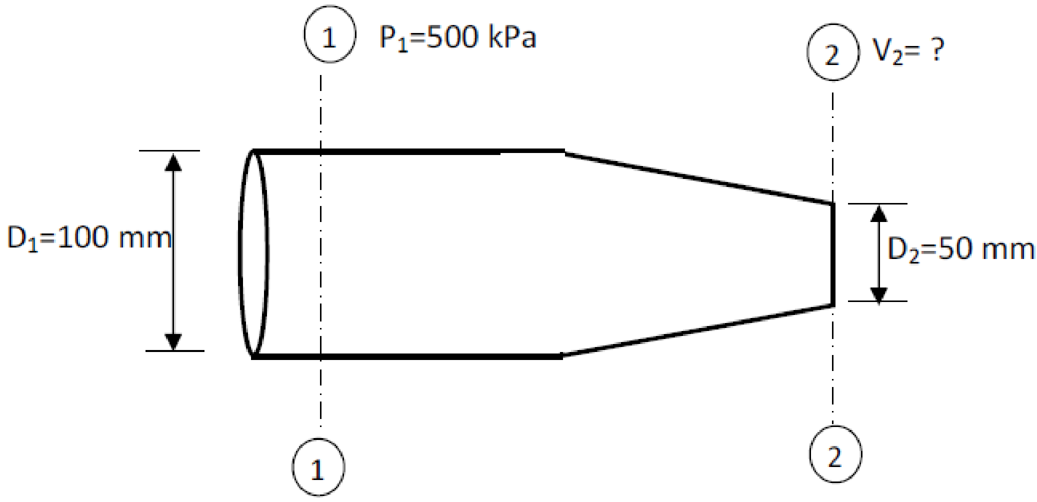
$$V_3\frac{\pi d_3^2}{4} = Q_1 + V_2\frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$V_3\frac{\pi 0{,}07^2}{4} = 0{,}05 + 2\frac{\pi 0{,}1^2}{4}$$

$$V_3 = \mathbf{4{,}13\ m/s}$$

EXERCICE 25

Une buse est connectée à un tuyau comme l'indique la figure ci-dessous. La pression au point 1 est 500 kPa (manométrique), déterminer la vitesse du jet.



Solution :

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2$$

P_1=500 kPa et P_2= Patm (négligeable)

Z_1=Z_2

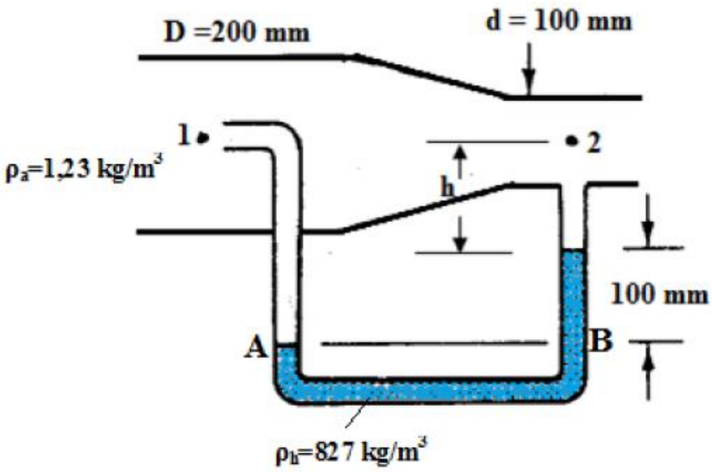
L'équation de continuité s'écrit :

$$Q=V_1S_1=V_2S_2\Rightarrow V_1=V_2\frac{d_2^2}{d_1^2}=\frac{V_2}{4}$$

$$\frac{V_2^2}{2g}-\frac{V_2^2}{32g}=\frac{P_1}{\rho g}\Rightarrow V_2=\sqrt{\frac{16}{15}\left(\frac{2P_1}{\rho}\right)}=\mathbf{32,66\ m/s}$$

EXERCICE 26

Un gaz s'écoule à travers une conduite schématisée par la figure ci-dessous. A partir des données de la figure, déterminer le débit d'écoulement du gaz.



Solution :

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2$$

On a :

$Z_1=Z_2$ (même niveau)

$V_1=0$ (point 1 est un point d'arrêt c-à-d est un obstacle), on trouve :

$$V_2=\sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{\rho_a}}$$

L'équation hydrostatique entre A et 1 et entre B et 2 :

$$P_A=P_1+\rho_a g(h+0{,}1)$$

$$P_B=P_2+\rho_h g(0{,}1)+\rho_a gh$$

Ainsi :

$P_A=P_B$ (même niveau, même liquide)

Alors :

$$P_1+\rho_a g(h+0{,}1)=P_2+\rho_h g(0{,}1)+\rho_a gh \Rightarrow P_1-P_2=(\rho_h-\rho_a)g\ 0{,}1$$

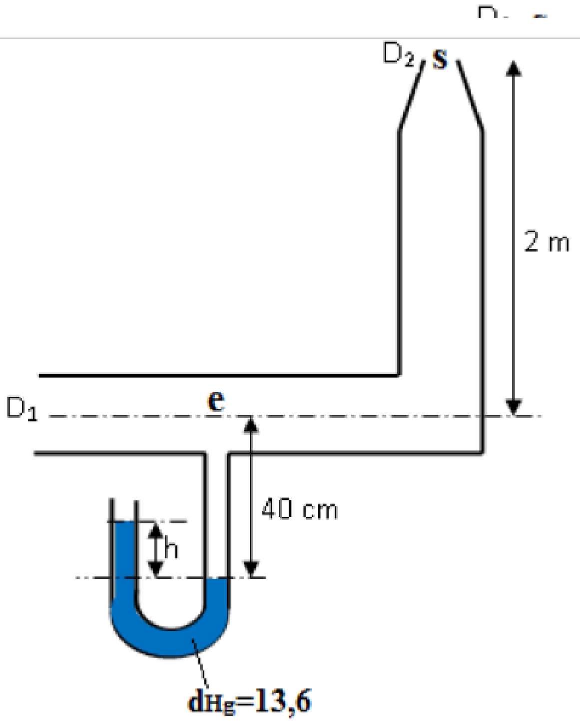
$$V_2=\sqrt{\frac{2(\rho_h-\rho_a)g\ 0{,}1}{\rho_a}}=\sqrt{\frac{2(827-1{,}23)g\ 0{,}1}{1{,}23}}=\mathbf{36{,}3\,m/s}$$

$$Q=V_2\,S_2=V_2\frac{\pi d^2}{4}=\mathbf{0{,}285\ m^3/s}$$

EXERCICE 27

De l'eau circule dans un coude et sort sous forme de jet vers le haut à travers une buse (figure 5). Un manomètre à mercure est placé en un point de la tuyauterie horizontale, en amont du coude. On négligera le frottement dans le fluide. Calculer l'élévation h du mercure.

On donne D_1= 9cm, D_2 =3cm, Ve=0,5 m/s



Solution :

Appliquons l'équation de Bernoulli entre **e** et **s** :

$$\frac{P_e}{\rho g}+\frac{V_e^2}{2g}+Z_e=\frac{P_s}{\rho g}+\frac{V_s^2}{2g}+Z_s$$

$$Z_e=0\,,Z_s=2\,m$$

$$P_s=Patm\ (négligeable)$$

$$\frac{P_e}{\rho g}=Z_s-\frac{V_e^2}{2g}+\frac{V_s^2}{2g}$$

$$Q=V_eS_e=V_sS_s\Rightarrow V_s=V_e\frac{D_1^2}{D_2^2}$$

$$\frac{P_e}{\rho g}=Z_s+\frac{V_e^2}{2g}\left(\frac{D_1^4}{D_2^4}-1\right)=3{,}02m$$

Par application de la loi de l'hydrostatique dans le manomètre

$$P_e=\rho_{Hg}gh-\rho g\,0{,}4$$

$$\frac{P_e}{\rho g}=\left(d_{Hg}h-0{,}4\right)=3{,}02m\Rightarrow h=\frac{0{,}4+3{,}02}{d_{Hg}}=\mathbf{0,25m}$$

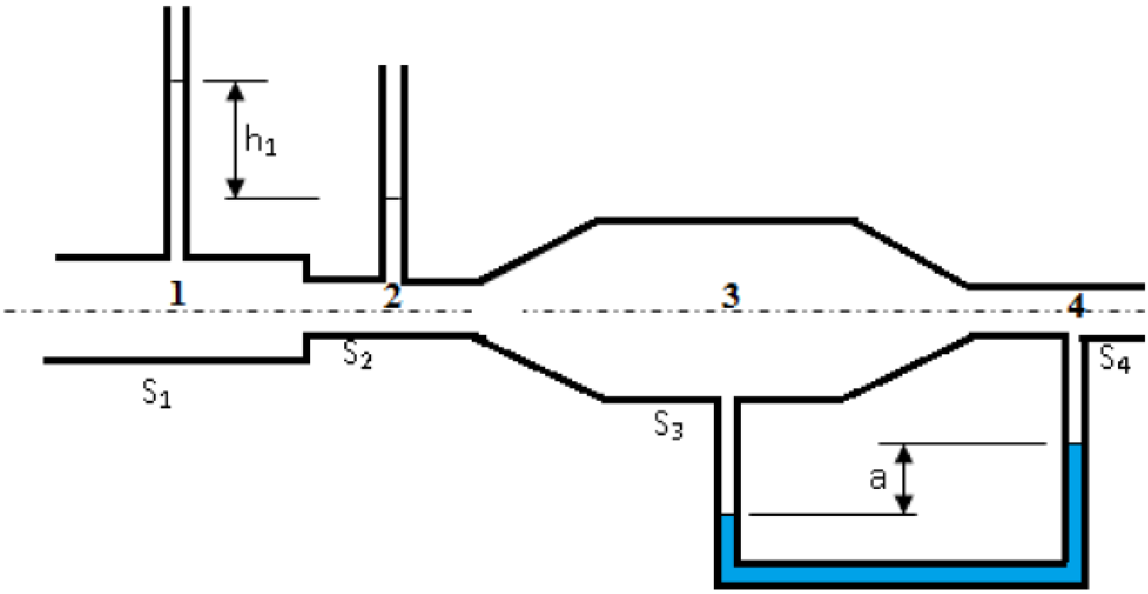
EXERCICE 28

Dans une conduite composée de 04 tronçons de section S_1, S_2, S_3 et S_4, s'écoule de l'eau en écoulement permanent. En considérant le fluide est parfait, calculer :

1. Les vitesses d'écoulement de l'eau dans chaque tronçon ;
2. La dénivellation (a) indiquée par le manomètre à mercure.

Données :

h_1=1,25m , S_1=60 cm^2, S_2=10 cm^2 S_3=80 cm^2 S_4=5 cm^2, ρ_{Hg}=13600 kg/m^3



Solution:

1. Les vitesses d'écoulement de l'eau dans chaque tronçon ;

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

On a :

$Z_1 = Z_2$ (même niveau)

L'équation de continuité s'écrit :

$$Q = V_1 S_1 = V_2 S_2 \Rightarrow V_1 = V_2 \frac{S_2}{S_1} = \frac{V_2}{6}$$

L'application de la loi de l'hydrostatique dans les deux piézomètres donne :

$$P_1 - P_2 = \rho g\, h_1$$

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} \Rightarrow V_2^2 - \frac{V_2^2}{36} = 2\frac{P_1 - P_2}{\rho} = 2gh_1$$

Donc :

$$V_2 = \sqrt{\frac{72}{35} g h_1} = \mathbf{5,02\ m/s}$$

$$V_1 = \frac{V_2}{6} = \mathbf{0,836\ m/s}$$

$$V_1 S_1 = V_3 S_3 \Rightarrow V_3 = \frac{V_1 S_1}{S_3} = \mathbf{0,627\ m/s}$$

$$V_1 S_1 = V_4 S_4 \Rightarrow V_4 = \frac{V_1 S_1}{S_4} = \mathbf{10,032\ m/s}$$

2. La dénivellation (a) indiquée par le manomètre à mercure.

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 3 et 4 :

$$\frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + Z_3 = \frac{P_4}{\rho g} + \frac{V_4^2}{2g} + Z_4$$

On a :

Z_3=Z_4 (même niveau)

$$\frac{P_3 - P_4}{\rho g} = \frac{V_4^2}{2g} - \frac{V_3^2}{2g} = \mathbf{5,11\ m}$$

L'application de la loi de l'hydrostatique dans le manomètre donne :

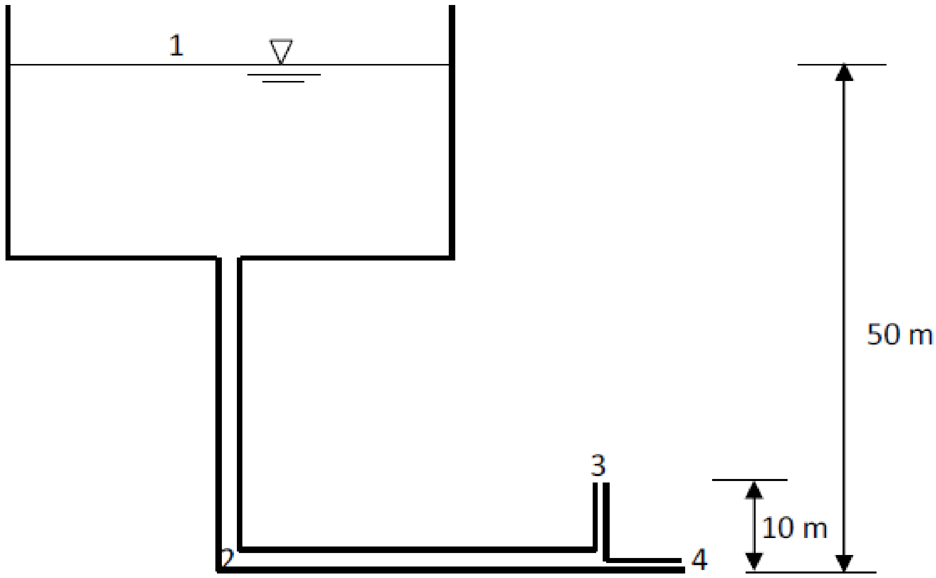
$$P_3 - P_4 = (\rho_{Hg} - \rho) g\, a \Rightarrow \frac{P_3 - P_4}{\rho g} = \frac{(\rho_{Hg} - \rho) a}{\rho} = 5{,}11\ m$$

Alors :

$$\boldsymbol{a = 0,405\ m}$$

EXERCICE 29

Le schéma de la figure ci-dessous représente un château d'eau et son système de distribution. La canalisation principale a un diamètre égal à d_2=500 mm. Le diamètre de la canalisation de distribution n° 3 et n°4 sont égal à d_3=200 mm et à d_4=300 mm. Les deux sorties sont à la pression atmosphérique. Déterminer les différents débits et la pression au point 2.



Solution :

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 4 puis entre 1 et 3 :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_4}{\rho g} + \frac{V_4^2}{2g} + Z_4$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + Z_3$$

On a :

$P_1=P_4=P_3=P_{atm}$

Z_1=50 m , Z_3=10 m et Z_4=0 m

V_1= 0 (réservoir de grande dimension)

On trouve :

$$V_3 = \sqrt{2g(Z_1 - Z_3)} = \mathbf{28,014\ m/s}$$

$$V_4 = \sqrt{2gZ_1} = \mathbf{31,32\ m/s}$$

Donc

$$Q_3 = V_3 S_3 = V_3\ \frac{\pi d_3^2}{4} = \mathbf{0,88\ m^3/s}$$

$$Q_4 = V_4 S_4 = V_4\ \frac{\pi d_4^2}{4} = \mathbf{2,21\ m^3/s}$$

$$Q_2 = Q_3 + Q_4 = \mathbf{3,09\ \ m^3/s}$$

Pour calculer la pression au point 2, on applique Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

On a :

P_1=Patm

Z_1=50 m , et Z_2=0 m

V_1= 0 (réservoir de grande dimension)

$$V_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{4Q_2}{\pi d_2^2} = \mathbf{15,74\ m/s}$$

On trouve :

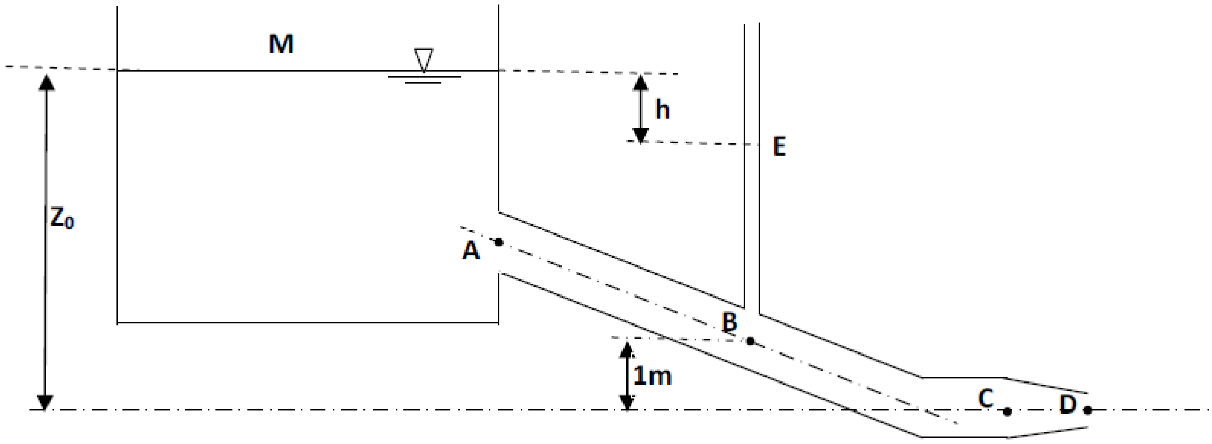
$$\frac{P_2}{\rho g} = Z_1 - \frac{V_2^2}{2g} = \mathbf{37,37\ m}$$

$$P_2 = 1000\ 9{,}81\ 37{,}37 = \mathbf{366,6kPa}$$

EXERCICE 30

Dans la figure ci-dessous, R est un réservoir à grandes dimensions rempli d'eau, et dont le niveau Z_0=4m. AC est une conduite de diamètre D=5 cm. En C se trouve une courte tuyère de diamètre de sortie d=2,0 cm. C et D sont sur la même horizontale. L'eau sort de D à l'air libre. Un tube est placé en B (piézomètre) en liaison avec la conduite. Le liquide est parfait.

1. calculer la vitesse V_D de l'eau à la sortie de la tuyère .
2. Calculer le débit Q
3. En déduire la vitesse V dans la conduite AC.
4. Calculer la pression en B
5. Déterminer la différence des niveaux h entre les surfaces libres du réservoir et du tube



Solution :

1. **Vitesse de sortie V_D**

   Appliquons l'équation de Bernoulli entre M et D :

   $$\frac{P_M}{\rho g} + \frac{V_M^2}{2g} + Z_M = \frac{P_D}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g} + Z_D$$

   $P_M=P_D=Patm$

   $V_M=0$ (réservoir de grande dimension)

Z_M=Z_0=4m et Z_D=0.0

$$V_D = \sqrt{2g\,Z_0} = \sqrt{2\;9{,}81\;4} = \mathbf{8{,}859}\boldsymbol{m/s}$$

2. Débit Q

$$Q = V_D S_D = \frac{\pi\;0.02^2}{4} 8{,}859 = \mathbf{0{,}0028}\;\boldsymbol{m^3/s}$$

3. Vitesse V_C

$$Q = V_D S_D = V_C S_C$$

$$V_C = V_D \frac{d_2^2}{d_1^2} = 8.859\left(\frac{0{,}02}{0{,}05}\right)^2 = \mathbf{1{,}417}\boldsymbol{m/s}$$

4. Pression P_B

Appliquons l'équation de Bernoulli entre B et M :

$$\frac{P_M}{\rho g} + \frac{V_M^2}{2g} + Z_M = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B$$

Origine de pression = Patm

Z_M=Z_0=4m, Z_B=1,0 m, V_B=V_C=1,417 m/s et V_M=0,0 m/s

$$\frac{P_B}{\rho g} = Z_0 - Z_B - \frac{V_B^2}{2g} = 4 - 1 - \frac{1.417^2}{2\;9{,}81} = \mathbf{2{,}897}\;\boldsymbol{m}$$

$\boldsymbol{P_B} = \mathbf{1000\;9{,}81\;2{,}897 = 28419{,}57}\;\boldsymbol{Pa}$ (pression manométrique)

5. La hauteur h

Par application de la loi de l'hydrostatique dans le piézomètre

$$P_B = \rho g\,(Z_0 - Z_B - h) \Rightarrow \frac{P_B}{\rho g} = (Z_0 - Z_B - h)$$

Alors

$$(Z_0 - Z_B - h) = Z_0 - Z_B - \frac{V_B^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{V_B^2}{2g} = \mathbf{0{,}102}\boldsymbol{m}$$

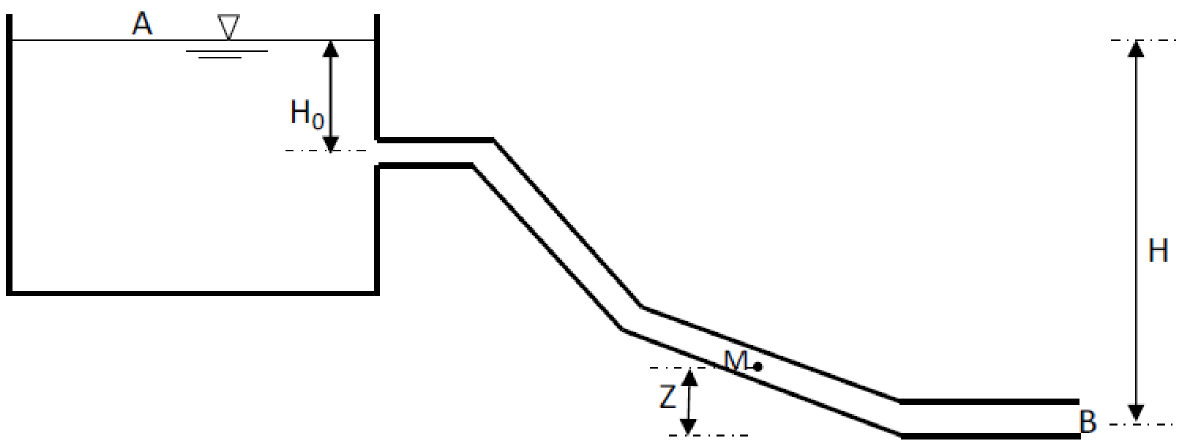
Exercice N°10 :

Une conduite amène de l'eau d'un barrage vers une station de traitement. La conduite cylindrique, de diamètre constant D = 30,0 cm et de longueur L = 200 m, se termine horizontalement, son axe étant situé à H = 120 m au-dessous de la surface libre de l'eau dans le barrage de très grande capacité. Le départ de la conduite est à H0 = 20 m au dessous du niveau pratiquement constant. On néglige tout frottement et on prendra les valeurs numériques suivantes :

$g = 9.81$ m.s-2, $\rho = 1000$ kg.m^{-3}, patm = 1,01 bar.

Pression de vapeur saturante de l'eau Pv= 23 mbar

1. Calculer la vitesse à la sortie A et le débit à la sortie ;
2. Déterminer littéralement la pression P_M au point M de côte Z ; pour quelles valeurs de Z la pression de l'eau devient-elle inférieure à la pression saturante de l'eau ? Quel serait le phénomène observé pour cette valeur limite de Z ?
3. Pour éviter ce problème dans la conduite, on dispose à l'extrémité A de la conduite une tubulure de section décroissante (injecteur), de diamètre de sortie d et d'axe horizontal. Décrire l'évolution de la pression à l'intérieur de la conduite.



Solution :

1. Vitesse de sortie V_B et le débit

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et B :

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B$$

$P_A=P_B=Patm$

$Z_B=0$ m $Z_A=H$

$V_A=0$ (réservoir de grande dimension)

$$V_B = \sqrt{2g\,H} = \sqrt{2\;9{,}81\;120} = \mathbf{48{,}52}\boldsymbol{m/s}$$

$$Q = V_B S_B = \frac{\pi\;0{,}3^2}{4} 48{,}52 = \mathbf{3{,}43}\;\boldsymbol{m^3/s}$$

2. La pression P_M au point M de côte Z

Appliquons l'équation de Bernoulli entre B et M :

$$\frac{P_M}{\rho g} + \frac{V_M^2}{2g} + Z_M = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B$$

P_B= Patm

$Z_B=0$ m $Z_M=Z$

$V_B=V_M$

$$\frac{P_M}{\rho g} = \frac{P_{atm}}{\rho g} - Z \Rightarrow P_M = P_{atm} - \rho g Z$$

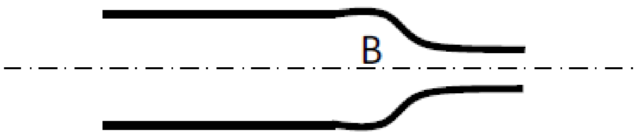
$$P_M \leq P_v \Rightarrow P_{atm} - \rho g Z \leq 0{,}023\;10^5$$

$$Z \geq \frac{(1{,}013 - 0{,}023)10^5}{1000\;9{,}81} = \mathbf{10{,}092}\;\boldsymbol{m}$$

Pour ces valeurs de z égales ou plus grandes que 10,092 m, il y a cavitation c'est-à-dire l'eau passera de la phase liquide à la phase vapeur. L'écoulement à ce moment – là sera perturbé et ne se fera plus.

3. Effet de l'injecteur

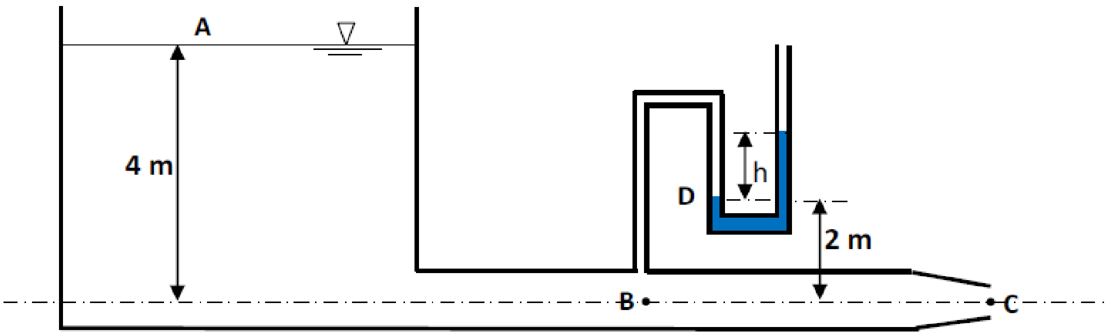
Le fait de placer un injecteur en bout de conduite a pour but de remonter la pression en amont, à l'intérieur de la conduite et ce, en réduisant le débit.



Exercice N°11 :

Dans la figure ci-dessous, R est un réservoir à grandes dimensions rempli d'eau, et dont le niveau Z_0=4m. AC est une conduite de diamètre D=5 cm. En C se trouve une courte tuyère de diamètre de sortie d=2,0 cm. C et D sont sur la même horizontale. L'eau sort de D à l'air libre. Un manomètre à mercure est placé en B en liaison avec la conduite. Le liquide est parfait.

1. Calculer la vitesse V_C de l'eau à la sortie de la tuyère.
2. Calculer le débit Q
3. En déduire la vitesse V dans le point B.
4. déterminer la pression en B et déduire l'élévation h du mercure dans le manomètre.



Solution :

1. Vitesse de sortie V_C

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et C :

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A = \frac{P_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g} + Z_C$$

P_A=P_C=Patm

Z_C=0 m Z_A=Z_0= 4 m

V_A=0 (réservoir de grande dimension)

$$V_C = \sqrt{2g\,Z_0} = \sqrt{2\;9{,}81\;4} = \mathbf{8{,}859}\boldsymbol{m/s}$$

2. Débit Q

$$Q = V_C S_C = \frac{\pi\ 0.02^2}{4} 8{,}86 = \mathbf{0{,}0028\ m^3/s}$$

3. Vitesse V_B

$$Q = V_B S_B = V_C S_C$$

$$V_B = V_C \frac{d^2}{D^2} = 8{,}859 \left(\frac{0{,}02}{0{,}05}\right)^2 = \mathbf{1{,}417 m/s}$$

4. La pression P_B

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et B :

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B$$

Origine de pression = Patm

Z_B=0 m Z_A=Z_0= 4 m

V_A=0 et V_B=1,417 m/s

$$\frac{P_B}{\rho g} = Z_A - \frac{V_B^2}{2g} = \mathbf{3{,}897\ m}$$

Par application de la loi de l'hydrostatique dans le manomètre :

$$P_B = \rho g\ 2 + \rho_{Hg} h \Rightarrow \frac{P_B}{\rho g} = 2 + d_{Hg} h = 3{,}897$$

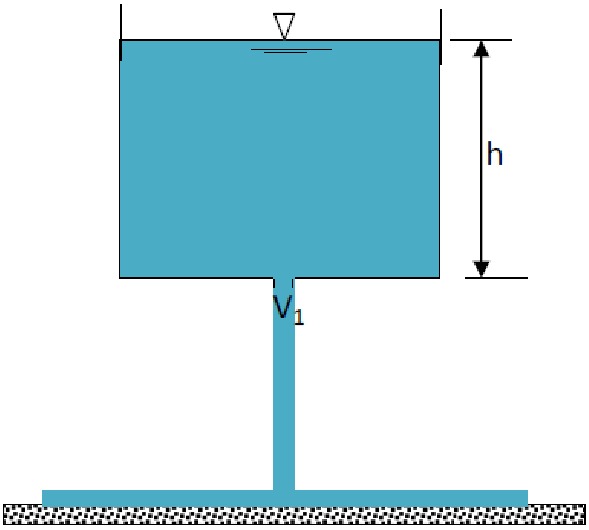
Alors :

$$h = \frac{3{,}897 - 2}{d_{Hg}} = \mathbf{0{,}14\ m = 14\ cm}$$

Exercice N°14 :

Un jet d'eau verticale sort par l'orifice circulaire d'un réservoir. Le jet se bute contre une plaque horizontale perpendiculaire à l'axe du jet. Si le diamètre de l'orifice est 12,5 cm et la hauteur d'eau dans le réservoir est 9 m :

1. Calculer la vitesse du jet à la sortie du réservoir ;
2. Calculer la force nécessaire pour maintenir la plaque en place contre la force du jet.



Solution :

1. **La vitesse du jet à la sortie du réservoir**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 0 et 1 :

$$\frac{P_0}{\rho g} + \frac{V_0^2}{2g} + Z_0 = \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1$$

On a :

Z_0=9 m et Z_1=0

V0=0

P_0=P_1=Patm

$V_1 = \sqrt{2gZ_0} = \mathbf{13,28\ m/s}$

2. **La force nécessaire pour maintenir la plaque en place contre la force du jet**

La force exercée par le fluide sur la plaque est:

$$F = \rho Q(V_1 - 0) = \rho V_1^2 S_{orifice} = \mathbf{2163,14\ N}$$

La force nécessaire pour maintenir la plaque en place contre la force du jet est égale et opposée à F .

Chapitre III Dynamique des fluides : Lois fondamentales de l'hydrodynami

III.1. Equation d'état isotherme

Quelle est la pression dans une fosse océanique à 10 km de profondeur, en supposant que l'eau de mer est incompressible, de masse volumique 1,03 10^3 kgm^{-3} et que la pression à la surface de l'eau est P_0 =1bar. On prendra g= 9.8 ms^{-2}.

On considère maintenant que l'eau a une masse volumique à la surface de l'eau de ρ=1,03 10^3 kgm^{-3} et un coefficient de compressibilité isotherme β = constante = 4.5 10^{-5} bar^{-1}.

1. Exprimer β en fonction de la masse volumique ρ.

1. $P(z) = P_0 + \rho\, g\, z \Rightarrow P_1\ (10km) = 1.01\ 10^8\ Pa = 1.01\ 10^5\ bar$.

2. $\chi_T = -\frac{1}{V}(\frac{\delta V}{\delta P})_T = \frac{1}{\rho}(\frac{\delta \rho}{\delta P})_T$

Exo 2.

Déterminer la diminution de volume de 1 litre d'eau soumis à une pression :

$p = 21.10^5$ Pa.

Il était au départ soumis à la pression atmosphérique :

$p_{atm} = 1.10^5$ Pa.

À quelle profondeur sous l'eau doit-on se trouver pour trouver une telle pression ?

On donne :

- le coefficient de compressibilité isotherme :
  $\chi_T = 5.10^{-10}\ \mathrm{m^2.N^{-1}}$;
- la masse volumique de l'eau :
  $\rho = 1000\ \mathrm{kg.m^3}$.
- la pesanteur :
  $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

'Solution'

1. Variation de volume :

On a :

$$\frac{\Delta V}{V} = -\chi_T \Delta P \rightarrow \Delta V = -V \chi_T \Delta P$$

avec :

$$\Delta P = 20.10^5 \text{ Pa}$$

$$V = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\Delta V = -10^{-6} \text{ m}^3 = -1 \text{ cm}^3$$

Le volume a diminué de 0,1%.

2. Loi de l'hydrostatique :

$P + \rho g z = cte$ et a $z = 0, P = P_a$

$$P + \rho g z = P_a$$

$$z = \frac{P_a - P}{\rho g}$$

$$z = -200 \text{ m}$$

On peut donc négliger la variation de masse volumique à cette profondeur.