Rappels mathématiques

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 01 :

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : A(2,3,-3), B(5,7,2)

Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que son module, sa direction et son sens.

Solution :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné par : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{i} + 5\,\vec{i}$

Son module : $AB = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

Sa direction est déterminée par les angles (α, β, θ) qu'il fait avec chacun des axes du repère.

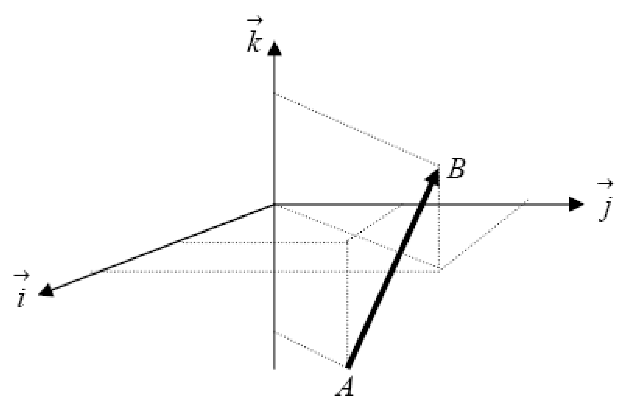
Ses angles se déduisent par le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par les vecteurs unitaires du repère orthonormé :

$$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \vec{i}) \ : \ \overrightarrow{AB} \bullet \vec{i} = AB.1.\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{i}}{AB} = \frac{3}{\sqrt{50}} = 0.424 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 64.89°$$

$$\beta = (\overrightarrow{AB}, \vec{j}) \ : \ \overrightarrow{AB} \bullet \vec{j} = AB.1.\cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{j}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{50}} = 0.565 \quad \Rightarrow \quad \beta = 55.54°$$

$$\theta = (\overrightarrow{AB}, \vec{k}) \ : \ \overrightarrow{AB} \bullet \vec{k} = AB.1.\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{k}}{AB} = \frac{5}{\sqrt{50}} = 0.707 \quad \Rightarrow \quad \theta = 44.99°$$

son sens : comme le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec les trois vecteurs unitaires est positif alors, il a un sens positif suivant les trois axes du repère.



Rappels mathématiques

Exercice 02 :

La résultante de deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ est égale à 50 N et fait un angle de 30° avec la force $F_1 = 15N$. Trouver le module de la force $\vec{F_2}$ et l'angle entre les deux forces.

Solution :

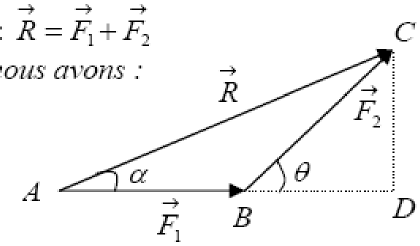
$R = 50\,N$; $V_1 = 15\,N$; $\alpha = 30°$, nous avons : $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Dans le triangle rectangle: *ACD rectangle en D, nous avons :*

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$AD = AB + BD = F_1 + F_2\cos\theta$

$DC = F_2 \sin\theta$



On obtient alors : $R^2 = (F_1 + F_2\cos\theta)^2 + (F_2\sin\theta)^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

Nous avons aussi :

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{CD}{R} \Rightarrow CD = R\sin\alpha \\ \sin\theta = \dfrac{CD}{F_2} \Rightarrow CD = F_2\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow R\sin\alpha = F_2\sin\theta \qquad \textbf{(2)}$$

et $$\cos\alpha = \frac{AD}{R} = \frac{F_1 + F_2\cos\theta}{R} \Rightarrow \cos\theta = \frac{R\cos\alpha - F_1}{F_2} \qquad \textbf{(3)}$$

en remplaçant l'expression (3) dans (1), on aboutit à :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\left(\frac{R\cos\alpha - F_1}{F_2}\right) = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1(R\cos\alpha - F_1)$$

d'où : $F_2 = \sqrt{R^2 - F_1^2 - 2F_1(R\cos\alpha - F_1)}$

$$F_2 = \sqrt{50^2 - 15^2 - 2x15(50\cos 30° - 15)} = 44{,}44N$$

L'expression **(3)** nous donne : $\cos\theta = \dfrac{50\cos 30 - 15}{50} = 0{,}566 \Rightarrow \theta = 55{,}528°$

Rappels mathématiques

Exercice 03 :

Soient les vecteurs suivants : $\vec{U}_1 = A_1\,\vec{i} + A_2\,\vec{j} + A_3\,\vec{k}$ *et* $\vec{U}_2 = B_1\,\vec{i} + B_2\,\vec{j} + B_3\,\vec{k}$

1) Calculer les produits scalaires : $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2$, $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_1$, $\vec{U}_2 \cdot \vec{U}_2$,

On donne : $\vec{V}_1 = 2\,\vec{i} - \vec{j} + 5\,\vec{k}$, $\vec{V}_2 = -3\,\vec{i} + 1{,}5\,\vec{j} - 7.5\,\vec{k}$, $\vec{V}_3 = -5\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + \vec{k}$

2) Calculer $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ et $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$;

3) Sans faire de représentation graphique que peut-on dire du sens et de la direction du vecteur $\vec{V}_2$ par rapport à $\vec{V}_1$;

4) Calculer les produits suivants $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$;

5) Déterminer la surface du triangle formé par les vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$

Solution :

1) $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$, $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_1 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$, $\vec{U}_2 \cdot \vec{U}_2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$

2) $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -6 - 1{,}5 - 37{,}5 = -45$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{cases} 2 \\ -1{,}5 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} -3 \\ 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{cases} = \begin{cases} 7{,}5 - 7{,}5 \\ -1{,}5 + 1{,}5 \\ 3 - 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

3) Comme le produit vectoriel des deux vecteurs est nul, alors ils sont parallèles

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_1 \;//\; \vec{V}_2$$

De plus leur produit scalaire est négatif $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -45$, alors les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont parallèles et de sens opposés

4) $$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \bullet \left(\begin{cases} -3 \\ 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{cases} \wedge \begin{cases} -5 \\ 4 \\ 1 \end{cases} \right) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \bullet \begin{cases} 31{,}5 \\ 40{,}5 \\ -4{,}5 \end{cases} = 63 - 40{,}5 - 22{,}5 = 0$$

on peut retrouver ce résultat par la méthode vectorielle :

Nous avons $\vec{V}_1 \;//\; \vec{V}_2$ soit $\vec{W} = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 \iff \begin{cases} \vec{V}_2 \perp \vec{W} \\ \vec{V}_3 \perp \vec{W} \end{cases}$, calculons $\vec{V}_1 \cdot \vec{W}$

Rappels mathématiques

$$\vec{V_2} \perp \vec{W} \text{ et } \vec{V_1} \mathbin{//} \vec{V_2} \Rightarrow \vec{V_1} \perp \vec{W} \Leftrightarrow \vec{V_1} \bullet \vec{W} = 0$$

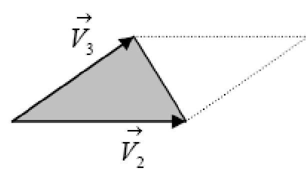
$$\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \wedge \left(\begin{cases} -3 \\ 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{cases} \wedge \begin{cases} -5 \\ 4 \\ 1 \end{cases} \right) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} 31{,}5 \\ 40{,}5 \\ -4{,}5 \end{cases} = \begin{cases} -198 \\ 166{,}5 \\ 112{,}5 \end{cases}$$

$$\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = -198\,\vec{i} + 166\,\vec{j} + 112{,}5\,\vec{k}$$

5) La surface du triangle formé par les vecteurs $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ est donnée par la moitié du module du produit vectoriel des deux vecteurs :

Nous avons : $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3} = 31{,}5\,\vec{i} + 40{,}5\,\vec{j} - 4{,}5\,\vec{k}$ alors :

$$\left| \vec{V_2} \wedge \vec{V_3} \right| = \sqrt{31{,}5^2 + 40{,}5^2 + (-4{,}5)^2} = 51{,}50$$



$$S = \frac{\left| \vec{V_2} \wedge \vec{V_3} \right|}{2} = \frac{51{,}50}{2} = 25{,}75$$

c'est la demi surface du parallélogramme :

Exercice 04 :

Soient les vecteurs :

$$\vec{U} = 2\,\vec{i} + 6\,\vec{k}\ ,\ \vec{V} = 8\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\ ,\ \vec{P} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k},\ \vec{Q} = -2\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 12\,\vec{k}$$

1) *Déterminer y et z pour que les vecteurs* $\vec{U}$ et $\vec{V}$ *soient colinéaires ;*

2) *Déterminer la valeur de y pour que les vecteurs* $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ *soient perpendiculaires;*

Solution :

1) Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires alors: $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 6 \end{cases} \wedge \begin{cases} 8 \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} -6y \\ -2z + 48 \\ 2y \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 24 \end{cases}$

2) Si $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ sont perpendiculaires alors : $\vec{P} \bullet \vec{Q} = 0$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \\ -4 \\ 2 \end{cases} \bullet \begin{cases} -2 \\ y \\ 12 \end{cases} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6 - 4y + 24 = 0 \quad y = \frac{9}{2}$$

Rappels mathématiques

Exercice 05 :

Trouvez le volume d'un parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs : $\vec{U}$, $\vec{P}$, $\vec{Q}$, *tel que :*

$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{P} = 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{Q} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$,

Solution :

Le volume d'un parallélépipède est un scalaire positif. On doit utiliser une opération vectorielle dont le résultat est un scalaire positif : c'est le module du produit mixte des trois vecteurs : $v = \left|\vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q})\right|$

$$\vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q}) = \begin{cases} 2 \\ 6 \\ 0 \end{cases} \bullet \left(\begin{cases} 0 \\ 3 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} 1 \\ 4 \\ -2 \end{cases} \right) = \begin{cases} 2 \\ 6 \\ 0 \end{cases} \bullet \begin{cases} -26 \\ 5 \\ -3 \end{cases} = -52 + 30 = -22 \; ; \; \Rightarrow$$

$$v = \left|\vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q})\right| = |-22| = 22$$

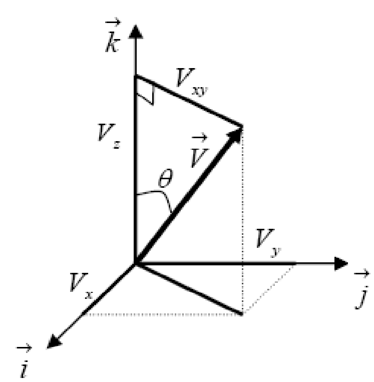
Exercice 06 :

La trajectoire d'un mobile dans un repère orthonormé directe $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *est donnée par les équations paramétriques suivantes :* $x = 4t^2$, $y = 4(t - \frac{t^3}{3})$, $z = 3t + t^3$

Montrer que le vecteur vitesse $\vec{V}$ fait un angle constant avec l'axe *oz. Quelle est la valeur de cet angle.*

Solution :

La vitesse du mobile est donnée par : $\vec{V} = \begin{cases} V_x = 8t \\ V_y = 4(1 - t^2) \\ V_z = 3(1 + t^2) \end{cases}$



Nous avons en effet :

$$tg\theta = \frac{V_{xy}}{V_z} = \frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{V_z}$$

$$tg\theta = \frac{\sqrt{64t^2 + 16(1 - t^2)^2}}{3(1 + t^2)} = \frac{\sqrt{64t^2 + 16t^4 - 32t^2 + 16}}{3(1 + t^2)}$$

Rappels mathématiques

$$tg\theta == \frac{\sqrt{16(t^2+2t^2+1)}}{3(1+t^2)} = \frac{\sqrt{16(1+t^2)^2}}{3(1+t^2)} = \frac{4(1+t^2)}{3(1+t^2)} = \frac{4}{3}$$

$tg\theta = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = 53{,}13°$ la valeur de l'angle est bien constante.

Exercice 07 :

La ligne d'action d'une force $\vec{F}$ de $800\,N$, passe par les points $A\begin{cases}1{,}22\\0\\2{,}74\end{cases}$ et $B\begin{cases}0\\1{,}22\\0{,}61\end{cases}$ dans un repère orthonormé. Déterminer les composantes de cette force

Solution :

Nous avons : $\overrightarrow{AB} = AB\ \vec{u}_{AB} \quad \Rightarrow \vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ vecteur unitaire porté par la ligne d'action.

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{-1{,}22\,\vec{i}+1{,}22\,\vec{j}-2{,}13\,\vec{k}}{\sqrt{(-1{,}22)^2+(1{,}22)^2+(-2{,}13)^2}} = \frac{-1{,}22\,\vec{i}+1{,}22\,\vec{j}-2{,}13\,\vec{k}}{2{,}74}$$

$$\vec{u}_{AB} = -0{,}445\,\vec{i}+0{,}445\,\vec{j}-0{,}777\,\vec{k}$$

La force $\vec{F}$ s'écrira :

$$\vec{F} = F\,\vec{u}_{AB} = 800(-0{,}445\,\vec{i}+0{,}445\,\vec{j}-0{,}777\,\vec{k}) = -356\,\vec{i}+356\,\vec{j}-621{,}6\,\vec{k})$$

Les composantes de la force sont ainsi connues suivant les trois axes du repère.

Exercice 08 :

Soit un repère orthonormé direct $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ dans l'espace vectoriel Euclidien R^3 à trois dimensions dans le corps des nombres réels. Soit un axe $\Delta(O,\vec{u})$ passant par le point O et de vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que : $\vec{u} = \begin{cases}u_1\\u_2\\u_3\end{cases}$, et un vecteur quelconque $\vec{V} = \begin{cases}V_1\\V_2\\V_3\end{cases}$

 Série d'exercice N°01

Rappels mathématiques

On note π_u un plan orthogonal à l'axe $\Delta(O,\vec{u})$

1) Calculer les produits scalaires suivants : $\vec{u}\bullet\vec{u}$, $\vec{V}\bullet\vec{V}$, $\vec{u}\bullet\vec{V}$;

2) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{W}=\vec{u}\wedge\vec{V}$ dans le repère $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$; E déduire dans cette base la matrice représentant l'opérateur produit vectoriel noté $\vec{u}\wedge=[*u]$;

3) Trouver l'expression du vecteur $\vec{V}_u$: projection orthogonale du vecteur $\vec{V}$ sur l'ax $\Delta(O,\vec{u})$; En déduire la matrice $[u_P]$ représentant l'opérateur projection orthogonale su l'axe $\Delta(O,\vec{u})$;

4) Trouver l'expression du vecteur $\vec{V}_\pi$: projection orthogonale du vecteur $\vec{V}$ sur le pla π_u ; En déduire la matrice $[u_\pi]$ représentant l'opérateur projection orthogonale sur sur l plan π_u ;

5) Déterminer l'expression de la distance d d'un point $P\begin{cases}x\\y\\z\end{cases}_R$ à l'axe $\Delta(O,\vec{u})$; En déduir l'expression matricielle représentant la distance au carrée : d^2 dans le repère R.

Solution :

1) Calcul des produits scalaires :

$$\vec{u}\bullet\vec{u}=u_1^2+u_2^2+u_3^2\ ,\quad \vec{V}\bullet\vec{V}=V_1^2+V_2^2+V_3^2\quad ,\quad \vec{u}\bullet\vec{V}=u_1V_1+u_2V_2+u_3V_3$$

2) $\vec{W}=\vec{u}\wedge\vec{V}$ dans le repère $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$

$$\vec{W}=\vec{u}\wedge\vec{V}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_2V_3-u_3V_2\\u_3V_1-u_1V_3\\u_1V_2-u_2V_1\end{pmatrix}$$, sous forme matricielle l'expression s'écrira :

$$\vec{W}=\begin{bmatrix}0&-u_3&u_2\\u_3&0&-u_1\\-u_2&u_1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{W}=\begin{bmatrix}0&-u_3&u_2\\u_3&0&-u_1\\-u_2&u_1&0\end{bmatrix}\vec{V}$$

Rappels mathématiques

$\vec{W} = [*u]\vec{V}$ avec : $[*u] = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$ opérateur produit vectoriel.

3) Expression du vecteur $\vec{V}_u$, projection de $\vec{V}$ sur l'axe $\Delta(O,\vec{u})$ dans R

Nous avons : $\vec{V}_u = \left(\vec{V} \cdot \vec{u}\right)\vec{u}$

$$\vec{V}_u = \left(\vec{V} \cdot \vec{u}\right)\vec{u} = (u_1V_1 + u_2V_2 + u_3V_3)\vec{u} = (u_1V_1 + u_2V_2 + u_3V_3)\left(u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3}\right)$$

$$= (u_1^2V_1 + u_1u_2V_2 + u_1u_3V_3)\vec{e_1} + (u_1u_2V_1 + u_2^2V_2 + u_2u_3V_3)\vec{e_2} + (u_1u_3V_1 + u_2u_3V_2 + u_3^2V_3)\vec{e_3}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(u_1 \quad u_2 \quad u_3)\vec{V} = [u]\left[u^T\right]\vec{V}$$

Nous avons donc : $[u_P] = [u][u^T] = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}(u_1 \quad u_2 \quad u_3) = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{bmatrix}$

4) Expression du vecteur $\vec{V}_\pi$, projection de $\vec{V}$ sur le plan (π) orthogonal à $\vec{u}$

Le vecteur $\vec{V}$ a deux composantes, l'une perpendiculaire au plan elle est portée par l'axe (Δ) et l'autre dans le plan (π).

Nous avons alors : $\vec{V} = \vec{V}_u + \vec{V}_\pi = \left(\vec{V} \cdot \vec{u}\right)\vec{u} + \vec{V}_\pi$

$\vec{V}_\pi = \vec{V} - \left(\vec{V} \cdot \vec{u}\right)\vec{u} = \left(\vec{u} \cdot \vec{u}\right)\vec{V} - \left(\vec{V} \cdot \vec{u}\right)\vec{u}$, on retrouve la forme du double produit

vectoriel d'où : $\vec{V}_\pi = \vec{u} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{u}\right)$. Le produit vectoriel est anticommutatif, alors :

$\vec{V} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{V} = -[*u]\vec{V}$, ce qui donne : $\vec{V}_\pi = [*u]\left\{-[*u]\vec{V}\right\}$

mais nous savons que : $[*u]^T = -[*u]$ on a finalement :

$$\vec{V}_\pi = [*u]\left\{[*u]^T\vec{V}\right\} = \left\{[*u][*u]^T\right\}\vec{V} = [u_P]\vec{V}$$

Rappels mathématiques

avec $[u_P] = [^*u][^*u]^T$

Développons cette expression :

$$[u_P] = [^*u][^*u]^T = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2^2+u_3^2 & -u_1u_2 & -u_1u_3 \\ -u_1u_2 & u_1^2+u_3^2 & -u_2u_3 \\ -u_1u_3 & -u_2u_3 & u_1^2+u_2^2 \end{bmatrix}$$

sachant que : $u_1^2+u_2^2+u_3^2=1$ alors : $u_2^2+u_3^2=1-u_1^2$, $u_1^2+u_3^2=1-u_2^2$, $u_1^2+u_2^2=1-u_3^2$

La matrice $[u_P]$ s'écrira :

$$[u_P] = \begin{bmatrix} 1-u_1^2 & -u_1u_2 & -u_1u_3 \\ -u_1u_2 & 1-u_2^2 & -u_2u_3 \\ -u_1u_3 & -u_2u_3 & 1-u_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1^2 & -u_1u_2 & -u_1u_3 \\ -u_1u_2 & u_2^2 & -u_2u_3 \\ -u_1u_3 & -u_2u_3 & u_3^2 \end{bmatrix}$$

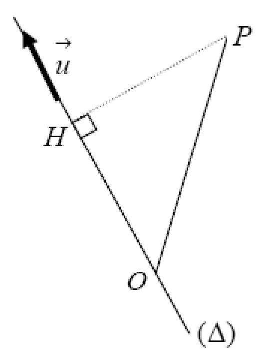
$$[u_p] = [1] - [u][u]^T$$

or nous avons $[u_P] = [^*u][^*u]^T \quad \Rightarrow \quad [^*u][^*u]^T = [1] - [u][u]^T$

finalement : $\qquad [^*u][^*u]^T + [u][u]^T = [1]$

5) Expression de la distance d du point P à l'axe $\Delta(O,\vec{u})$

$$d = \left\|\overrightarrow{HP}\right\|$$



Calculons le produit vectoriel : $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}$

Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a pour composantes : $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}_R$

$$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u} = \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP}\right) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HP} \wedge \vec{u}$$

$$\left\|\overrightarrow{HP} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HP}\right\|\left\|\vec{u}\right\| \sin 90° = \left\|\overrightarrow{HP}\right\| = d$$

nous avons alors :

$d^2 = \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\right)$ nous allons utiliser la règle du produit mixte afin de développer cette expression.

Rappels mathématiques

$$d^2 = \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\right) \bullet \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\right) = \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}, \overrightarrow{OP}, \vec{u}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}, \overrightarrow{OP}\right)$$

$$= \left(\vec{u}, \overrightarrow{OP}, \vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) = \vec{u} \bullet \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right)$$ qui s'écrit sous forme :

$$d^2 = \vec{u} \bullet \vec{V} \quad \text{avec} \quad \vec{V} = \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right)$$

D'après ce que l'on a vu précédemment, nous pouvons écrire :

$$\left[* \vec{r}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$d^2 = \vec{u} \bullet \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right) = \vec{u} \bullet \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(-\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\right)\right) = \vec{u} \bullet (\vec{r} \wedge (-\vec{r} \wedge \vec{u}) = \left[\vec{u}\right]^T \left([*r][-*r]\right)\left[\vec{u}\right]$$

or nous avons $[-*r] = [*r]^T$

$$d^2 = \left[\vec{u}\right]^T \left([*r][*r]^T\right)\left[\vec{u}\right] = \left[\vec{u}\right]^T [I_O]\left[\vec{u}\right] \quad \text{avec} \quad \left([*r][*r]^T\right) = [I_O]$$

$$[I_O] = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

en faisant intervenir la masse du solide, nous obtenons une matrice de la forme :

$$[J_0] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ -\int_S xydm & \int_S (x^2 + z^2)dm & -\int_S yzdm \\ -\int_S xzdm & -\int_S yzdm & \int_S (x^2 + y^2)dm \end{bmatrix}$$

qui est une matrice très particulière que l'on retrouvera dans les chapitres sur la cinétique et la dynamique des solides.

Elle est appelée matrice d'inertie du solide.