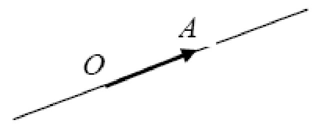
1. Opérations sur les vecteurs

Dans tout ce qui suit, on s'intéressera à l'ensemble E des vecteurs $\vec{V}$ de l'espace usuel. E est un espace Euclidien à trois dimensions.

2. Définition

Un vecteur est un segment de droite OA sur lequel on a choisi une origine O et une extrémité A ; il est défini par :

- son origine ;
- sa direction ;
- son sens ;
- son module.



Par convention on adopte la notation suivante : vecteur : $\vec{V}$ ou $\overrightarrow{OA}$

3. Classification des vecteurs

Il existe plusieurs types de vecteurs :

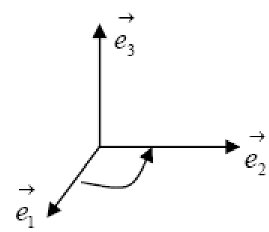
- *Vecteur libre :* la direction, le sens et le module sont donnés mais la droite support et le point d'application (origine du vecteur) ne sont pas connues ;
- *Vecteur glissant :* le point d'application (origine du vecteur) n'est pas fixé ;
- *Vecteur lié :* tous les éléments du vecteur sont déterminés ;
- *Vecteur unitaire :* c'est un vecteur dont le module est égal à 1.

4. Composantes d'un vecteur

Considérons une base de l'espace R^3 notée : $R_0 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Cette base est orthonormée

si : $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{i = j} \\ 0 & \text{si } \mathrm{i \neq j} \end{cases}$

La base R_0 est dite directe si un observateur se plaçant à l'extrémité du vecteur $\vec{e}_3$ verra le vecteur $\vec{e}_1$ tourner vers le vecteur $\vec{e}_2$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



Dans cette base un vecteur $\vec{V}$ de composantes $(x, y, z) \in R^3$ s'écrirait :

$$\vec{V} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$$

Les quantités réelles x, y, z sont appelées composantes du vecteur $\vec{V}$ dans la base R^3.

La notation adoptée est la suivante : $\vec{V} = \underset{R_0}{} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$

5. Loi de composition interne : Somme vectorielle

La somme de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est un vecteur $\vec{W}$ tel que :

$\forall \ \vec{V_1}, \vec{V_2} \in R^3$ nous avons $\vec{W} = \vec{V_1} + \vec{V_2} \in R^3$

Soit (a_1, a_2, a_3) les composantes du vecteur $\vec{V_1}$ d'où : $\vec{V_1} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3}$ et

(b_1, b_2, b_3) les composantes du vecteur $\vec{V_2}$ d'où : $\vec{V_2} = b_1 \vec{e_1} + b_2 \vec{e_2} + b_3 \vec{e_3}$

Le vecteur somme est défini par la relation :

$$\vec{W} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = (a_1 + b_1)\vec{e_1} + (a_2 + b_2)\vec{e_2} + (a_3 + b_3)\vec{e_3}$$

L'élément neutre ou vecteur nul, est noté : $\vec{0} = (0,0,0)$

5.1 Propriétés de la somme vectorielle

- la somme vectorielle est commutative : $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$;
- la somme vectorielle est associative : $\left(\vec{V_1} + \vec{V_2}\right) + \vec{V_3} = \vec{V_1} + \left(\vec{V_2} + \vec{V_3}\right)$;
- l'élément neutre est défini par : $\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$;
- A tout vecteur $\vec{V}$ correspond un vecteur opposé noté $-\vec{V}$ tel que : $\vec{V} + \left(-\vec{V}\right) = \vec{0}$

5.2 Multiplication par un scalaire

Si λ est un nombre réel et $\vec{V}$ un vecteur, leur produit est un vecteur.

$\forall \lambda \in R$, $\forall \ \vec{V} \in R^3$ ========> $\vec{W} = \lambda \vec{V} \in R^3$

Le vecteur $\vec{W}$ est colinéaire au vecteur $\vec{V}$.

Si le vecteur $\vec{V}$ a pour composantes *(a, b, c)* tel que : $\vec{V} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3}$; le vecteur $\vec{W}$

s'écrirait : $\vec{W} = \lambda a_1 \vec{e_1} + \lambda a_2 \vec{e_2} + \lambda a_3 \vec{e_3}$

La multiplication d'un vecteur par un scalaire vérifie les propriétés suivantes :

a) *Distribution par rapport à l'addition des scalaires :* $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{V} = \lambda_1 \vec{V} + \lambda_2 \vec{V}$;

b) *Distribution par rapport à la somme vectorielle :* $\lambda(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \lambda \vec{V}_1 + \lambda \vec{V}_2$;

c) *Associativité pour la multiplication par un scalaire :* $\lambda_1(\lambda_2 \vec{V}) = \lambda_1 \lambda_2 \vec{V}$

6. Combinaison linéaire des vecteurs

Soit les n vecteurs : $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{V}_i \ldots\ldots\ldots \vec{V}_n$ de l'espace R^3 et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots\lambda_n$ des nombres réels. Les vecteurs $\lambda_1 \vec{V}_1, \lambda_2 \vec{V}_2, \lambda_3 \vec{V}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_i \vec{V}_i \ldots\ldots\ldots \lambda_n \vec{V}_n$ sont aussi des vecteurs de l'espace R^3 ainsi que leur somme $\vec{W}$ défini par :

$$\vec{W} = \lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n \vec{V}_n = \sum_i^n \lambda_i \vec{V}_i$$

Le vecteur $\vec{W}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs : $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \ldots\ldots\ldots \vec{V}_n$

6.1. Dépendance et indépendance linéaire entre les vecteurs

6.1.1. Définition

On dit que les n vecteurs : $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{V}_i \ldots\ldots\ldots \vec{V}_n$ de l'espace R^3 sont linéairement indépendant si et seulement si, ils vérifient la relation suivante : $\sum_i^n \lambda_i \vec{V}_i = \vec{0}$ entraîne que tous les λ_i sont nuls.

$$\sum_i^n \lambda_i \vec{V}_i = \lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n \vec{V}_n = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0 \;,\; \lambda_2 = 0 \;, \ldots\ldots\; \lambda_n = 0$$

Si les λ_i ne sont pas tous nuls on dit que les vecteurs sont linéairement dépendant entre eux.

6.1.2. Propriétés sur l'indépendance des vecteurs

a) Un vecteur $\vec{V}$ est à lui seul un vecteur linéairement indépendant ;

b) Dans un système de vecteurs linéairement indépendants, aucun d'entre eux ne peut être un vecteur nul ;

c) Dans un ensemble de vecteurs indépendants, tout sous ensemble prélevé sur ces vecteurs forme un système de vecteurs indépendants.

6.1.3. Propriétés sur la dépendance des vecteurs

Si n vecteurs sont dépendants entre eux alors, au moins l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des autres. Soit les n vecteurs : $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{V}_i \ldots\ldots\ldots \vec{V}_n$ de l'espace R^3 et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots\lambda_n$ des nombres réels, si ces vecteurs sont linéairement dépendants la relation :

$$\sum_i^n \lambda_i \vec{V}_i = \vec{0}$$

Implique qu'il existe des λ_i non nuls, de telle sorte que la relation puise s'écrire :

$$\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n \vec{V}_n = \vec{0} \quad \text{qui donne par exemple :}$$

$$\lambda_1 \vec{V}_1 = -\left(\lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n \vec{V}_n\right)$$

$$\vec{V}_1 = -\frac{1}{\lambda_1}\left(\lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n \vec{V}_n\right)$$

On dit alors que $\vec{V}_1$ dépend linéairement des vecteurs : $\vec{V}_2, \vec{V}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \vec{V}_n$

Remarque :

a) Si $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \vec{V}_n$ sont linéairement indépendant, alors les vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \vec{V}_n, \vec{V}_{n+1}, \vec{V}_{n+2}, \ldots$ le sont aussi quel que soit les vecteurs $, \vec{V}_{n+1}, \vec{V}_{n+2}, \ldots$

Dans un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, chaque vecteur est une combinaison unique des autres vecteurs.

b) Soit $\vec{W} = \sum_i^n \alpha_i \vec{V}_i$ et $\vec{U} = \sum_i^n \beta_i \vec{V}_i$ deux vecteurs indépendants:

L'égalité entre les deux vecteurs indépendants est équivalente à n égalités entre les nombres réels : Si $\vec{W} = \vec{V} \iff \alpha_i = \beta_i$

7. Produit scalaire de deux vecteurs

On appelle *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ une loi de composition externe qui associe aux deux vecteurs, un scalaire (nombre réel) noté : $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$ tel que :

$$\forall\ \vec{V}_1,\ \vec{V}_2\ \in R^3 \quad \Rightarrow \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 \in R$$

$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \left\|\vec{V}_1\right\| \left\|\vec{V}_2\right\| \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$; le résultat d'un produit scalaire est un scalaire.

Le produit scalaire est nul, si :

- Les deux vecteurs sont orthogonaux ;
- L'un des vecteurs est nul.

7.1 Propriétés du produit scalaire

a) linéarité : $\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right) \bullet \vec{W} = \vec{V}_1 \bullet \vec{W} + \vec{V}_2 \bullet \vec{W}$

$$\left(\lambda \vec{V}\right) \bullet \vec{W} = \lambda\left(\vec{V} \bullet \vec{W}\right)$$

b) ***symétrie par rapport aux vecteurs :*** $\vec{V} \bullet \vec{W} = \vec{W} \bullet \vec{V}$ donc : $\vec{V} \bullet \vec{V} > 0$ si $\vec{V} \neq \vec{0}$

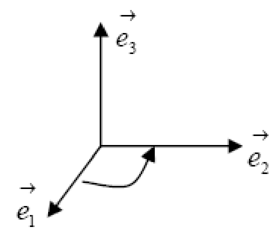
Le produit scalaire est une forme linéaire symétrique associée aux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

7.2 Expression analytique du produit scalaire

Considérons une base b de l'espace R^3 notée : $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Cette base est orthonormée si :

$$\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = j \\ 0 & \text{si } \ i \neq j \end{cases}$$

La base b est dite directe si un observateur se plaçant à l'extrémité du vecteur $\vec{e}_3$ verra le vecteur $\vec{e}_1$ tourner vers le vecteur $\vec{e}_2$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$. Leurs expressions dans cette base sont :

$$\vec{V}_1 = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3$$

$$\vec{V}_2 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3$$

Le produit scalaire des deux vecteurs est donné par :

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \left(a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3\right) \bullet \left(b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

7.3. Norme ou module d'un vecteur

On appelle norme ou module d'un vecteur $\vec{V}$, noté : $\left\|\vec{V}\right\|$ la racine carrée positive du produit scalaire du vecteur par lui-même. $\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{\vec{V} \bullet \vec{V}} = \sqrt{\vec{V}^2}$

Nous avons en particuliers : $\left\|\lambda\,\vec{V}\right\| = \left\|\lambda\right\| \left\|\vec{V}\right\|$

$\left\|\vec{V}_1\right\| - \left\|\vec{V}_2\right\| \le \left\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right\| \le \left\|\vec{V}_1\right\| + \left\|\vec{V}_2\right\|$: appelé inégalité triangulaire.

7.4. Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\text{Si} \quad \vec{V} \perp \vec{W} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V} \bullet \vec{W} = \vec{0}$$

Si trois vecteurs non nuls sont orthogonaux deux à deux, ils sont alors linéairement indépendant et ils constituent une base orthogonale dans R^3 .

7.5. Base orthonormée

Une base est dite orthonormée si les vecteurs qui la constituent sont perpendiculaires deux à deux et si leurs normes sont égales à 1. Si $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormée nous avons alors :

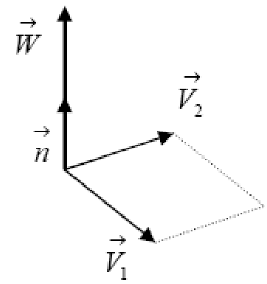
$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = 0 \quad , \quad \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 = 0 \quad , \quad \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 = 0$$

$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 = \vec{e}_1^{\,2} = 1 \quad , \quad \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 = \vec{e}_2^{\,2} = 1 \quad , \quad \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 = \vec{e}_3^{\,2} = 1$$

8. Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ de l'espace R^3 est un vecteur $\vec{W}$ perpendiculaire à $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, défini par : $\vec{W} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \left\|\vec{V_1}\right\| \left\|\vec{V_2}\right\| \sin\left(\vec{V_1}, \vec{V_2}\right) \vec{n}$

ou $\vec{n}$: est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$



Le produit vectoriel est nul si :

- Les deux vecteurs sont colinéaires ;
- L'un des vecteurs, est nul.

8.1. Propriétés du produit vectoriel

a) Le module du produit vectoriel est égal à l'aire du parallélogramme formé par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$;

b) Le produit vectoriel est distributif à gauche et à droite pour la somme vectorielle :

$$(\vec{V_1}+\vec{V_2}) \wedge \vec{W} = \vec{V_1} \wedge \vec{W} + \vec{V_2} \wedge \vec{W}$$

$$\vec{W} \wedge (\vec{V_1}+\vec{V_2}) = \vec{W} \wedge \vec{V_1} + \vec{W} \wedge \vec{V_2}$$

c) Le produit vectoriel est associatif pour la multiplication par un nombre réel :

$$(\lambda \vec{V}) \wedge \vec{W} = \lambda(\vec{V} \wedge \vec{W})$$

$$\vec{V} \wedge \lambda \vec{W}) = \lambda(\vec{V} \wedge \vec{W})$$

d) Le produit vectoriel est antisymétrique (anticommutatif)

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -\vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$$

Si on applique cette propriété au produit vectoriel d'un même vecteur, nous aurons :

$$\vec{V} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{V}) = \vec{0}$$

On déduit à partir de cette propriété que : deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

Si $\vec{V_1} \,//\, \vec{V_2}$ alors $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{0}$

En effet si $\vec{V_1} \,//\, \vec{V_2}$ on peut écrire : $\vec{V_1} = \lambda\, \vec{V_2} \;\Rightarrow\; \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \lambda(\vec{V_2} \wedge \vec{V_2}) = \vec{0}$

8.2. Produit vectoriel des vecteurs unitaires d'une base orthonormée

Si $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormée nous avons :

Sens direct : $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

Sens opposé : $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$, $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$

8.3. Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormé direct

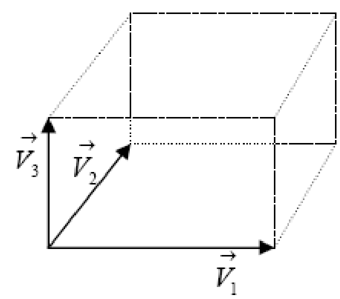
Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ de composantes respectives dans une base orthonormée direct R: $\vec{V}_1 = {}_R\begin{cases} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{cases}$ et $\vec{V}_2 = {}_R\begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases}$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{cases} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases} = \begin{cases} Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 \\ Z_1 X_2 - X_1 Z_2 \\ X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \end{cases}$$

8.4. Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ pris dans cet ordre, le nombre réel défini par : $\vec{V}_1 \cdot \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$

Le produit mixte est donc un scalaire égal au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs.



Le produit mixte est nul, si :

- les trois vecteurs sont dans le même plan ;
- deux des vecteurs sont colinéaires ;
- l'un des vecteurs, est nul.

On montre facilement que, dans une base orthonormée directe, le produit mixte est un variant scalaire par permutation circulaire direct des trois vecteurs car le produit scalaire est commutatif:

$$\vec{V}_1 \cdot \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right) = \vec{V}_3 \cdot \left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) = \vec{V}_2 \cdot \left(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1\right)$$

Remarque :

Une notation simplifiée, dans laquelle les opérateurs n'apparaissent pas, est adoptée dans ce cas pour faciliter l'écriture des équations vectorielles :

$$\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right) \text{ est équivalent à } \left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right)$$

nous avons alors :
$$\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right) = \left(\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = \left(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1\right)$$

8.5. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs respectifs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ est un vecteur $\vec{W}$ exprimé par la relation : $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$. Le vecteur $\vec{W}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{V}_1$ et au vecteur formé par le produit : $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$, il est donc dans le plan formé par les vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$. Le vecteur $\vec{W}$ peut s'écrire : $\vec{W} = a\vec{V}_2 + b\vec{V}_3$

Nous pouvons présenter cette relation autrement par identification des scalaires a et b, on obtient :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = (\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2)\vec{V}_3$$

Il faut faire attention à l'ordre des vecteurs car le produit vectoriel n'est pas commutatif.

Pour retenir cette formule, il est plus simple de l'écrire sous la forme :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \bullet \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \bullet \vec{B})$$

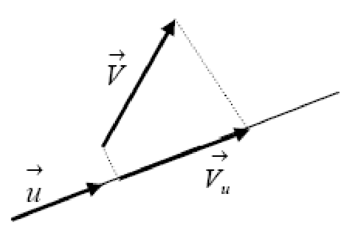
9. Projection des vecteurs

9.1. Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe

Soit $\vec{V}$ un vecteur quelconque, et (Δ) un axe de l'espace défini par son vecteur unitaire $\vec{u}$.

La projection orthogonale du vecteur $\vec{V}$ est la composante $\vec{V}_u$ de ce vecteur du cet axe.

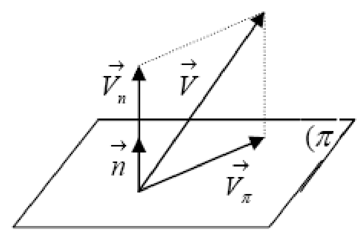
$$\vec{V}_u = (\vec{V} \bullet \vec{u})\vec{u}$$



9.2. Projection orthogonale d'un vecteur sur un plan

Soit $\vec{V}$ un vecteur quelconque, et (π) un plan de l'espace défini par la normale $\vec{n}$. La projection orthogonale du vecteur $\vec{V}$ est la composante $\vec{V}_\pi$ dans le plan.

Le vecteur $\vec{V}$ a deux composantes l'une dans le plan et l'autre perpendiculaire au plan. On a ainsi : $\vec{V}_\pi = \vec{V} - \vec{V}_n = \vec{V} - (\vec{V} \bullet \vec{n})\,\vec{n}$



Qui s'écrit aussi sous la forme : $\vec{V}_\pi = (\vec{n} \bullet \vec{n})\vec{V} - (\vec{V} \bullet \vec{n})\,\vec{n}$

On retrouve la relation du double produit vectoriel

entre les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{n}$: $\vec{V}_\pi = \vec{n} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{n})$

10. Division vectorielle

Si $\vec{X} \wedge \vec{V} = \vec{W}$, on dit que $\vec{X}$ est le résultat de la division vectorielle de $\vec{W}$ par $\vec{V}$

i) $\vec{V}$ ne doit pas être un vecteur nul ;

ii) $\vec{W}$ et $\vec{V}$ doivent être orthogonaux

S'il existe une solution particulière $\vec{X}_0$, alors elle est la forme $\vec{X}_0 = \alpha \vec{V} \wedge \vec{W}$

En remplaçant cette valeur dans l'expression $\vec{X} \wedge \vec{V} = \vec{W}$ on obtient :

$$\alpha(\vec{V} \wedge \vec{W}) \wedge \vec{V} = \vec{W} \quad \Leftrightarrow \alpha\vec{W}(\vec{V} \bullet \vec{V}) - \alpha\vec{V}(\vec{V} \bullet \vec{W}) = \vec{W}$$

Comme $\vec{V} \perp \vec{W}$ alors $\vec{V} \bullet \vec{W} = 0$; on obtient :

$$\alpha\vec{W}(\vec{V} \bullet \vec{V}) = \vec{W} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{V^2}$$

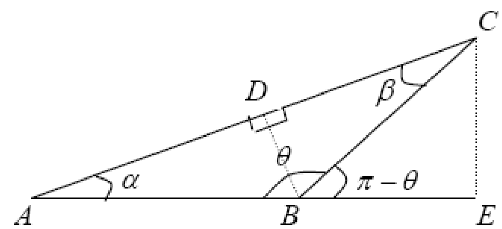
Nous avons aussi : $\vec{X} \wedge \vec{V} = \vec{X}_0 \wedge \vec{V} \quad \Rightarrow \quad (\vec{X} - \vec{X}_0) \wedge \vec{V} = \vec{0}$ cette expression montre que le vecteur $(\vec{X} - \vec{X}_0)$ est parallèle à $\vec{V}$, dans ce cas nous pouvons écrire que :

$$(\vec{X} - \vec{X}_0) = \lambda\vec{V} \quad \text{avec} \quad \lambda \in IR \quad \text{ou} \quad \vec{X} = \vec{X}_0 + \lambda\vec{V}$$

finalement : $$\vec{X} = \frac{\vec{V} \wedge \vec{W}}{V^2} + \lambda\vec{V}$$

11. Règle des sinus dans un triangle

Soit un triangle quelconque ABC nous pouvons établir une relation entre les trois côtés et les trois angles du triangle.



Dans les triangles ABD et CBD, nous avons :

$$\sin\alpha = \frac{DB}{AB} \quad \text{et} \quad \sin\beta = \frac{DB}{BC}$$

d'où : $AB\sin\alpha = BC\sin\beta$

On déduit : $\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta}$

De même pour les triangles AEC et BEC , nous avons :

$$\sin\alpha = \frac{EC}{AC} \quad \text{et} \quad \sin(\pi-\theta) = \frac{EC}{BC} \quad \text{d'où} \quad AC\sin\alpha = BC\sin(\pi-\theta) = BC\sin\theta$$

On déduit : $\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{sin\theta}$

On déduit finalement une relation appelée règle des sinus dans un triangle:

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin\theta}$$

12. Opérateurs et vecteurs

12.1 Opérateur gradient dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On défini l'opérateur vectorielle noté : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ comme étant la dérivée dans l'espace suivant les trois directions des vecteurs unitaires.

Le gradient d'un scalaire U est défini comme étant la dérivée vectorielle suivant les trois directions respectives $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ par rapport aux variables : x, y, z .

$$\overrightarrow{gradU}(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{grad}\,U = \vec{\nabla}U$$

Exemple :

$$U = 3xy - 2zx + 5yz \ : \ \frac{\partial U}{\partial x} = 3y - 2z \ , \ \frac{\partial U}{\partial y} = 3x + 5z \ , \ \frac{\partial U}{\partial z} = -2x + 5y$$

$$\overrightarrow{gradU}(x,y,z) = (3y-2z)\vec{i} + (3x+5z)\vec{j} + (-2x+5y)\vec{k}$$

Le gradient d'un scalaire est un vecteur.

12.2 Opérateur divergence dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

La divergence d'un vecteur $\vec{V} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}$ est définie comme étant le produit scalaire

de l'opérateur : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ par le vecteur $\vec{V}$; noté : $div\,\vec{V} = \vec{\nabla}\bullet\vec{V}$

$$div(\vec{V}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\bullet\left(V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}\right) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

La divergence d'un vecteur est un scalaire.

12.3 Opérateur rotationnel dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{V} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}$ est définie comme étant le produit

vectoriel de l'opérateur : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ par le vecteur $\vec{V}$;

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} \quad ; \qquad \overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\wedge\left(V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}\right)$$

Le rotationnel d'un vecteur est aussi un vecteur.

Sous la forme matricielle nous aurons : $\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{cases} \wedge \begin{cases}V_x\\ V_y\\ V_z\end{cases} = \begin{cases}\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\end{cases}$

Remarque :

Si f est un champ scalaire et $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs quelconques, les relations suivantes sont vérifiées :

- $div(f\,\vec{A}) = f div\,\vec{A} \; + \; \vec{A}\,\overrightarrow{grad f}$;
- $rot(rot\,\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{A}) \; - \; \Delta\vec{A}$, avec $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$;
- $\overrightarrow{rot}(f\,\vec{A}) = \overrightarrow{grad f}\wedge\vec{A}) \; + \; f\,\overrightarrow{rot}(\vec{A})$;
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad f}) = \vec{0}$;
- $div(\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = 0$;
- $div(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\bullet\overrightarrow{rot}(\vec{A}) - \vec{A}\bullet\overrightarrow{rot}(\vec{B})$